KAPITEL 4

RANG UND DETERMINANTE EINER MATRIX

4.1 Rang

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer wichtigen

Bemerkung 4.1.1
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ Unbekannten und

$$A\mathbf{x}^T = \mathbf{0} \tag{4.1.1}$$

das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem. Sie haben schon bemerkt, dass die Menge Σ_0 der Lösungen des Systems ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ ist (Sehen Sie Aufgabe 3.6, wobei $\Sigma_0 = \ker(A)$, und man kann annehmen, dass wir einen allgemeinen Körper $\mathbb{K}$ haben). Was wir bemerken möchten ist, dass *die Existenz einer nicht trivialen Lösung des Systems abhängt von der linearen Abhängigkeit der Spalten von A.*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und $S_1 = (a_{11}\ a_{21}\ \cdots\ a_{m1}), S_2 = (a_{12}\ a_{22}\ \cdots\ a_{m2}), \ldots, S_n = (a_{1n}\ a_{2n}\ \cdots\ a_{mn})$ die Spalten von A, betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^m$. Wir bemerken, dass $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ ist genau dann, wenn

$$k_1S_1 + k_2S_2 + \cdots + k_nS_n = \mathbf{0} \in \mathbb{K}^m\,.$$

Wir können schließen, dass

(i) Das System $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ eine nicht triviale Lösung hat genau dann, wenn die Spalten von A (betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^m$) linear abhängig sind.

(ii) Im Allgemeinen sagt uns die Menge der Lösungen des Systems 4.1.1, welche Spalten als Linearkombinationen der anderen Spalten geschrieben werden können.

(iii) Also hängt die Dimension von $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, \ldots, S_n\}$ nur von den Lösungen des Systems $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ ab.

Vorlesung 15 - 08.12.2016

Nachstehend möchten wir folgende Frage beantworten: “Wie viele” Lösungen hat $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$?

Um die obige Frage zu präzisieren, brauchen wir das Konzept vom Rang einer Matrix.

Definition 4.1.1
Es sei A eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$.
Es seien $Z_1 = (a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}), Z_2 = (a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2n}), \ldots, Z_m = (a_{m1}\ a_{12}\ \cdots\ a_{mn})$ ihre Zeilen, betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^n$, und $S_1 = (a_{11}\ a_{21}\ \cdots\ a_{m1})$, $S_2 = (a_{12}\ a_{22}\ \cdots\ a_{m2}), \ldots, S_n = (a_{1n}\ a_{2n}\ \cdots\ a_{mn})$ ihre Spalten, betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^m$.

- Der *Zeilenrang* von A, bezeichnet mit $z(A)$, ist definiert als die Dimension von $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$.
- Der *Spaltenrang* von A, bezeichnet mit $s(A)$, ist definiert als die Dimension von $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$.

Beispiel 4.1.1
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
Da $Z_2 = 2Z_1$ und $Z_1 \neq \mathbf{0}$, erhalten wir, dass der Zeilenrang gleich 1 ist. Da $S_2 = S_3 = 2S_1$ und $S_1 \neq \mathbf{0}$ erhalten wir, dass der Spaltenrang gleich 1 ist. Also ist der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang. Im folgenden Satz beweisen wir, dass das immer so ist.

Satz 4.1.1
Für jede Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ist der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $z(A) = 0$ genau dann, wenn A die Nullmatrix ist, und $A = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $s(A) = 0$. Wir können nun annehmen, dass $z(A) > 0$. Wie wir schon in Bemerkung 4.1.1 gesagt haben, hängt der Spaltenrang von A nur von der Menge der Lösungen des Systems (4.1.1) ab. Deshalb ändert sich $s(A)$ nicht, wenn wir zwei Zeilen des Systems (4.1.1) vertauschen (Proposition 1.3.1). Jetzt möchten wir folgendes benutzen:

Bemerkung 4.1.2
Es sei $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_m\}) = r$. Dann $r \leq m$ und es existieren r linear unabhängige Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r} \in \{v_1, \ldots, v_m\}$, sodass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_m\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ (Übung).

Nach dieser Bemerkung wissen wir, dass es $z(A)$ Zeilen von A gibt, sodass ihr Span genau $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ ist. Nehmen wir an, dass genau die erste $z(A)$ Zeilen von A erfüllen $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_{z(A)}\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ und definieren wir
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{z(A)1} & a_{z(A)2} & \cdots & a_{z(A)n} \end{pmatrix}.$$

Bemerken wir, dass $z(A) = z(\tilde{A})$. Wir möchten beweisen, dass $s(A) = s(\tilde{A})$. Weil $Z_i \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \dots, Z_{z(A)}\}$ für alle $i = z(A), \dots, m$, existieren Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_{z(A)}$, sodass $Z_i = \alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_{z(A)} Z_{z(A)}$. Es folgt, dass die Menge der Lösungen des Systems $\tilde{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ enthalten sind in der Menge der Lösungen des Systems (4.1.1). In der Tat, es sei $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ eine Lösung des Systems $\tilde{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$, dann für alle $i = z(A), \dots, m$

$$Z_i \cdot \mathbf{k}^T = (\alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_{z(A)} Z_{z(A)}) \cdot \mathbf{k}^T = \alpha_1 \overbrace{Z_1 \cdot \mathbf{k}^T}^{=0} + \cdots + \alpha_{z(A)} \overbrace{Z_{z(A)} \cdot \mathbf{k}^T}^{=0} = 0.$$

Umgekehrt ist es leicht zu sehen, dass jede Lösung von (4.1.1) eine Lösung des Systems $\tilde{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ ist. Nach Bemerkung 4.1.1 können wir schließen, dass $s(A) = s(\tilde{A})$.

Jetzt bemerken wir, dass die Spalten von $\tilde{A}$ Vektoren in $\mathbb{K}^{z(A)}$ sind. Weil $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{z(A)}) = z(A)$, erhalten wir, dass $s(A) = s(\tilde{A}) \leq z(A)$.

Durch Wiederholung der obigen Argumentation mit A^T anstelle von A, erhalten wir, dass $z(A) = s(A^T) \leq z(A^T) = s(A)$, und die Behauptung folgt. □

Der obige Satz erlaubt uns, folgende Definition zu geben:

Definition 4.1.2
Es sei A eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Ihr *Rang*, bezeichnet mit $r(A)$, ist definiert als ihr Zeilenrang (oder, nach Satz 4.1.1, als ihr Spaltenrang).

Beispiel 4.1.2
Was ist der Rang von $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$? Wir bemerken, dass die Zeilen (und Spalten) von I_n die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ geben, also $r(I_n) = n$.

Bemerkung 4.1.3
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Weil die Zeilen Vektoren in $\mathbb{K}^n$ und die Spalten Vektoren in $\mathbb{K}^m$ sind, nach Satz 4.1.1 erhalten wir, dass

$$r(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Die folgende Proposition ist leicht zu beweisen und ihr Beweis ist eine Übung.

Proposition 4.1.2
Es sei A eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$, und A' eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$, die von A erhalten werden kann durch folgende "elementare Operationen":

(1) Vertauschung von (zwei oder mehr) Zeilen (bzw. Spalten);

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. einer Spalte) mit einem Faktor der ungleich Null ist;

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile (bzw. einer Spalte) von einer anderen.

(Sehen Sie Definition 1.3.2). Dann gilt

$$r(A) = r(A')\,.$$

Bemerkung 4.1.4
Bemerken Sie, dass die obige Proposition wie folgt formuliert werden kann:

Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $E \in M_m(\mathbb{K})$ eine elementare Matrix. Dann

$$r(A) = r(EA)\,.$$

Es sei $F \in M_n(\mathbb{K})$ eine elementare Matrix, dann

$$r(A) = r(AF)\,.$$

(Vergleichen Sie mit Proposition 2.2.4.)

Proposition 4.1.3 *1. Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Dann*

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}\,.$$

2. Es seien $A \in GL_m(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $C \in GL_n(\mathbb{K})$. Dann

$$r(AB) = r(B) = r(BC)\,.$$

Beweis. 1. Es seien $Z_1(A), \dots, Z_m(A)$ die Zeilen von A, betrachtet als Zeilenvektoren (also $Z_i \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ für alle i) und $S_1(B), \dots, S_p(B)$ die Spalten von B, betrachtet als Spaltenvektoren (also $S_h(B) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ für alle h). Durch Definition von Matrixmultiplikation, für alle $i = 1, \dots, m$ ist die i-te Zeile von AB gegeben durch

$$\begin{aligned}
Z(AB)_i &= (Z(A)_i S(B)_1, Z(A)_i S(B)_2, \dots, Z(A)_i S(B)_p) = \\
&= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}, \dots, \\
&\qquad a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \dots + a_{in}b_{np}) = \\
&= a_{i1}Z(B)_1 + a_{i2}Z(B)_2 + \dots + a_{in}Z(B)_n\,,
\end{aligned}$$

wobei $Z_1(B), \dots, Z_n(B)$ die Zeilen von B sind, betrachtet als Zeilenvektoren. Also ist die i-te Zeile von AB eine Linearkombination von Zeilen von B. Es folgt, dass

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z(AB)_1, \dots, Z(AB)_m\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z(B)_1, \dots, Z(B)_n\},$$

deshalb $r(AB) \leq r(B)$. Um zu beweisen, dass $r(AB) \leq r(A)$, bemerken wir, dass

$$r(AB) = r((AB)^T) = r(B^T A^T) \leq r(A^T) = r(A)\,,$$

und erhalten die Behauptung.

2. Durch die Ungleichung, die wir in 1. bewiesen haben, erhalten wir

$$r(AB) \leq r(B) = r((A^{-1}A)B) = r(A^{-1}(AB)) \leq r(AB),$$

also $r(AB) = r(B)$. Ähnlich kann man beweisen, dass $r(B) = r(BC)$.

□

Was folgt ist der wichtigste Satz dieses Abschnitts:

Satz 4.1.4
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $r(A) = n$.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass A invertierbar ist. Durch Proposition 4.1.3 Teil 2., erhalten wir, dass $r(A) = r(AA^{-1}) = r(I_n) = n$ (Sehen Sie Beispiel 4.1.2).

Jetzt nehmen wir an, dass $r(A) = n$. Also ist die Menge der Zeilen $\{Z(A)_1, Z(A)_2, \ldots, Z(A)_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Es seien $Z(I_n)_i \in \mathbb{K}^n$, für $i = 1, \ldots, n$, die Zeilen der Einheitsmatrix I_n. Weil $\{Z(A)_1, Z(A)_2, \ldots, Z(A)_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist, existieren Koeffizienten $b_{i1}, \ldots, b_{in} \in \mathbb{K}$, sodass

$$Z(I_n)_i = b_{i1}Z(A)_1 + b_{i2}Z(A)_2 + \cdots + b_{in}Z(A)_n\,.$$

Es sei $B \in M_n(\mathbb{K})$ die Matrix, deren Koeffizienten gegeben sind durch $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Bemerken wir, dass die obige Gleichung äquivalent ist zu $I_n = BA$. Ähnlich kann man beweisen, dass es $C \in M_n(\mathbb{K})$ gibt, sodass $I_n = AC$. Also $B = B(AC) = (BA)C = C$ und $B = A^{-1}$. Also ist A invertierbar. □

Vorlesung 16 - 12.12.2016

4.2 Die Determinante

Wir möchten eine Abbildung

$$\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

definieren, wobei $\det(A)$ die *Determinante* von A genannt wird. In Satz 4.1.4 haben wir bewiesen, dass A invertierbar ist genau dann, wenn $r(A) = n$. Die Determinante erlaubt uns noch ein Kriterium zu haben, um zu wissen ob A invertierbar ist oder nicht. Insbesondere, was wir beweisen möchten, ist dass

$$A \text{ ist invertierbar genau dann, wenn } \det(A) \neq 0.$$

4.2.1 Definition der Determinante

Es sei $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(D1) $d(I_n) = 1$ (*Normalisierung*);

(D2) Die Abbildung ist *linear in jeder Zeile*: Es seien $Z_1, \ldots, Z_n, \widetilde{Z}_i \in \mathbb{K}^n$ n-dimensionale Zeilenvektoren, dann für alle $1 \leq i \leq n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i + \lambda \widetilde{Z}_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \widetilde{Z}_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

(D3) Wenn $A \in M_n(\mathbb{K})$ zwei gleiche Zeilen hat, dann gilt $d(A) = 0$.

Was wir beweisen möchten ist, dass es genau eine Abbildung d mit obigen Eigenschaften gibt, und d wird die Determinante genannt und bezeichnet mit “ det″.

Bemerkung 4.2.1
Nach Eigenschaft (D2) haben wir, dass *falls eine Zeile von A gleich Null ist, dann* $d(A) = 0$. In der Tat, gegeben die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_{i-1}, \mathbf{0}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n$ von A, und gegeben ein beliebiger Zeilenvektor $Z_i \in \mathbb{K}^n$, dann können wir Z_i als $Z_i + \lambda\mathbf{0}$ schreiben, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, und nach (D2) haben wir

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i + \lambda\mathbf{0} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \mathbf{0} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Weil wir $\lambda \neq 0$ nehmen können, gibt uns die obige Gleichung $d(A) = 0$.

Zuerst beweisen wir folgendes:

Satz 4.2.1
Es sei $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die die Eigenschaften (D2) und (D3) erfüllt, und $E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda) \in GL_n(\mathbb{K})$ die Elementarmatrizen (Sehen Sie Abschnitt 2.2.3). Dann gilt für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. *$d(E_{ij} \cdot A) = -d(A)$, für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.*

2. *$d(E_i(\lambda) \cdot A) = \lambda\, d(A)$, für alle $\lambda \neq 0$ und $1 \leq i \leq n$.*

3. *$d(E_{ij}(\lambda) \cdot A) = d(A)$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Beweis. Es seien $Z_1, \ldots, Z_n$ die Zeilen von A, und $1 \leq i < j \leq n$. Nehmen wir die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

Nach Eigenschaft (D3) erhalten wir, dass $d(B) = 0$, und nach Eigenschaft (D2) haben wir, dass

$$\begin{aligned} 0 &= d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ nach (D3)}} + \underbrace{d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=d(A)} + \underbrace{d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{d(E_{ij} \cdot A)} + \underbrace{\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ nach (D3)}} = d(A) + d(E_{ij} \cdot A)\,, \end{aligned}$$

und wir erhalten Eigenschaft 1.

Um 2. zu beweisen, seien $Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_n$ die Zeilen von einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, und wir schreiben λZ_i als $\mathbf{0} + \lambda \cdot Z_i$. Nach (D2) und Bemerkung 4.2.1 haben wir, dass

$$d(E_i(\lambda)\cdot A) = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \lambda Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \mathbf{0} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda\, d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda d(A).$$

Jetzt beweisen wir 3. Es seien $Z_1,\dots,Z_i,\dots,Z_n$ die Zeilen von einer Matrix $A\in M_n(\mathbb{K})$. Dann nach (D2)

$$d(E_{ij}(\lambda)\cdot A) = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i+\lambda Z_j \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda d\underbrace{\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_j \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=:B} = d(A)+\lambda d(B).$$

Bemerken wir, dass die i-te und j-te Zeile der letzter Matrix B gleich sind, also ist $d(B)=0$ nach (D3), und wir erhalten $d(E_{ij}(\lambda)\cdot A)=d(A)$. □

Bemerkung 4.2.2
Mit obigen Tatsachen können wir Eigenschaft (D2) generalisieren: Gegeben Zeilenvektoren $Z_1,\dots,Z_{i-1},Z_{i+1},\dots,Z_n\in\mathbb{K}^n$, $Z_i^1,\dots,Z_i^k\in\mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}^n$, gilt

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \lambda_1 Z_i^1+\cdots+\lambda_k Z_i^k \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda_1 d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i^1 \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i^k \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

(Übung.)

Korollar 4.2.2
Es sei $d\colon M_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ eine Abbildung, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Dann

(a) $d(E_{ij}) = -1$ *für alle* $1 \leq i < j \leq n$;
$d(E_i(\lambda)) = \lambda$ *für alle* $1 \leq i \leq n$ *und* $\lambda \neq 0$;
$d(E_{ij}(\lambda)) = 1$ *für alle* $1 \leq i \neq j \leq n$.

(b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ *und* $E \in GL_n(\mathbb{K})$ *eine Elementarmatrix. Dann*

$$d(E \cdot A) = d(E) \cdot d(A) \quad \textit{und} \quad d(E^T) = d(E).$$

Beweis. Um (a) zu beweisen, genügt es Satz 4.2.1 zu benutzen mit $A = I_n$. Die erste Gleichung in (b) folgt nach Satz 4.2.1 und Korollar 4.2.2 (a). Die zweite Gleichung ist eine Folgerung von Teil (a) und folgender

Bemerkung 4.2.3
Die Elementarmatrizen erfüllen

$$E_{ij}^T = E_{ij}, \quad E_i(\lambda)^T = E_i(\lambda), \quad E_{ij}(\lambda)^T = E_{ji}(\lambda)\,.$$

(Übung.)

□

Die folgende Proposition ist eine wichtige Folgerung aus dem Satz 4.1.4.

Proposition 4.2.3
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ *eine Matrix, die nicht invertierbar ist. Dann muss für jede Abbildung* $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, *die die Eigenschaften (D2) und (D3) erfüllt,* $d(A) = 0$ *sein.*

Beweis. Weil A nicht invertierbar ist, impliziert Satz 4.1.4, dass $r(A) < n$. Also sind die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_n$ von A linear abhängig. Es sei

$$\alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_n Z_n = \mathbf{0}$$

eine Linearkombination, die Null ist. Weil $Z_1, \ldots, Z_n$ linear abhängig sind, gibt es ein $i = 1, \ldots, n$ mit $\alpha_i \neq 0$. Also können wir Z_i als Linearkombination von $Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n$ schreiben:

$$Z_i = \beta_1 Z_1 + \cdots + \beta_{i-1} Z_{i-1} + \beta_{i+1} Z_{i+1} + \cdots + \beta_n Z_n.$$

Nach Bemerkung 4.2.2 erhalten wir, dass

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \beta_1 d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_1 \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \cdots + \beta_{i-1} d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_{i-1} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \beta_{i+1} d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_{i+1} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \cdots + \beta_n d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_n \\ \vdots \\ Z_{i+1} \\ Z_n \end{pmatrix},$$

und nach (D3) ist die rechte Seite Null. □

Bemerken Sie, dass eine Abbildung $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die die Eigenschaften (D2) und (D3) erfüllt, gegeben ist zum Beispiel durch $d(A) = 0$ für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$ (also ist $d(A) = 0$ nicht nur für nicht-invertierbare Matrizen). Aber, wenn wir Eigenschaft (D1) benötigen, möchten wir beweisen, dass es genau eine Abbildung d gibt (die wird die Determinante genannt), und $d \not\equiv 0$, weil (D1) uns sagt, dass $d(I_n) = 1$.

Definition 4.2.1
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Für jede $1 \leq i, j \leq n$ definieren wir die Matrix $\tilde{A}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ als die Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Zum Beispiel sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{dann z. B.} \quad \tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.2.4
Es existiert genau eine Abbildung $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$*, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Wir bezeichnen diese Abbildung mit*

$$\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

und nennen $\det(A)$ *die* *<u>Determinante</u>* *von* A*.*

Beweis. <u>*Eindeutigkeit*</u>. Es seien $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ und $\tilde{d}\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ zwei Abbildungen, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllen. Wir sollen beweisen, dass $d(A) = \tilde{d}(A)$ für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$. Falls A nicht invertierbar ist, Proposition 4.2.3 impliziert, dass $d(A) = \tilde{d}(A) = 0$. Können wir nun annehmen, dass A invertierbar ist. Es seien $E_1, \ldots, E_n$ Elementarmatrizen, sodass $I_n = E_N \cdots E_1 A$ (Sehen Sie Abschnitt 2.2.3). Nach Eigenschaft (D1) erhalten wir, dass

$$d(E_N \cdots E_1 A) = \tilde{d}(E_N \cdots E_1 A).$$

Wir können nun Korollar 4.2.2 N-Male benutzen (bemerken Sie, dass $d(E) \in \mathbb{K}^*$ für alle Elementarmatrizen E!) um zu zeigen, dass $d(A) = \tilde{d}(A)$.

Vorlesung 17 - 15.12.16

<u>*Existenz*</u>. Um die Existenz zu beweisen, genügt es eine Abbildung zu finden, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Weil eine solche Abbildung eindeutig definiert ist, bezeichnen wir sie mit "det", sie wird *Determinante* genannt. Wir definieren $\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ durch Induktion über n.

Für $n = 1$ kann man leicht beweisen, dass $\det(a) = a$ Eigenschaften (D1)–(D3) erfüllt für alle $(a) \in M_1(\mathbb{K})$. Nehmen wir an, dass wir die Determinante für alle $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen schon definiert haben. Dann definieren wir für $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $j = 1, \dots, n$

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}) \quad (\textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte}), \qquad (4.2.1)$$

wobei $\tilde{A}_{ij}$ die Matrix in Definition 4.2.1 ist.

Bemerkung 4.2.4
Bemerken Sie, dass wir in (4.2.1) ein $j = 1, \dots, n$ gewählt haben. Also, apriorisch hängt die rechte Seite in (4.2.1) von j ab. Aber wenn wir beweisen, dass die Abbildung in (4.2.1) die Eigenschaften (D1)–(D3) erfüllt, dann haben wir durch Eindeutigkeit auch bewiesen, dass die Summe in (4.2.1) nicht von j abhängt.

(D1): Wir müssen beweisen, dass $\det(I_n) = 1$. Bemerken Sie, die Einträge von I_n erfüllen $a_{ij} \neq 0$ genau dann, wenn $i = j$, und $a_{jj} = 1$. Ferner ist $(\tilde{I_n})_{jj} = I_{n-1}$. Also per definitionem

$$\det(I_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det((\tilde{I_n})_{jj}) = (-1)^{j+j} a_{jj} \det(I_{n-1}) = \det(I_{n-1}).$$

Weil $\det\colon M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Eigenschaft (D1) (nach Induktionsannahme) erfüllt, erhalten wir, dass $\det(I_n) = \det(I_{n-1}) = 1$.

(D2): Wir müssen die Linearität in jeder Zeile beweisen, d.h. für alle $1 \leq k \leq n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{k-1} \\ Z_k + \lambda \tilde{Z}_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{k-1} \\ Z_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{k-1} \\ \tilde{Z}_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Es sei A die Matrix mit Zeilen $Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_k + \lambda \tilde{Z}_k, Z_{k+1}, \dots, Z_n$ und $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$ einer der Summanden in (4.2.1). Falls $k \neq i$ bemerken wir, dass nach Induktion $\det(\tilde{A}_{ij})$ linear in der k-ten Zeile (von $\tilde{A}_{ij}$) ist, und a_{ij} nicht von k abhängt. Somit erhalten wir, dass $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$ linear in der k-ten Zeile von A ist. Falls $k = i$, dann ist a_{kj} linear in der k-ten Zeile. Ferner hängt $\tilde{A}_{kj}$ nicht von der k-ten Zeile ab. Also erhalten wir auch in diesem Fall, dass $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$ linear in der k-ten Zeile von A ist. Es folgt, dass $\det(A)$ linear in der k-ten Zeile ist.

(D3): Nehmen wir an, dass die r-te und s-te Zeile von A gleich sind. Bemerken Sie, dass falls $i \neq r$ und $i \neq s$, die Matrix $\tilde{A}_{ij}$ zwei gleiche Zeilen hat. Also ist in diesem Fall $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$ (nach Induktionsannahme), und nach (4.2.1) erhalten wir

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}) = (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) + (-1)^{s+j} a_{sj} \det(\tilde{A}_{sj}).$$

Bemerken Sie, dass die Menge der Zeilen von $\tilde{A}_{rj}$ gleich der Menge der Zeilen von $\tilde{A}_{sj}$ ist. Dass heißt, dass wir $\tilde{A}_{rj}$ in $\tilde{A}_{sj}$ mit Zeilenvertauschung überführen können. Nach Satz 4.2.1 und nach Induktionsannahme wissen wir, dass $\det(E_{jk}\tilde{A}_{sj}) = -\det(\tilde{A}_{sj})$. Also möchten wir berechnen wie viele Vertauschungen wir brauchen, um $\tilde{A}_{rj}$ in $\tilde{A}_{sj}$ überzuführen. Wir erklären diese Berechnung mit einem Beispiel. Es seien $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n \in \mathbb{K}^{n-1}$ die Zeilen von A ohne j-tes Element (also ohne a_{ij}, für $i = 1, \dots, n$). Es sei $s = r + 1$. Dann sind die Zeilen von $\tilde{A}_{rj}$ gegeben durch $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{r-1}, \tilde{Z}_{r+1}, \tilde{Z}_{r+2}, \dots, \tilde{Z}_n$, und diejenigen von $\tilde{A}_{sj}$ durch $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{r-1}, \tilde{Z}_r, \tilde{Z}_{r+2}, \dots, \tilde{Z}_n$. Weil $\tilde{Z}_r = \tilde{Z}_{r+1}$, erhalten wir, dass $\tilde{A}_{rj} = \tilde{A}_{sj}$, und wir brauchen $|s-r| - 1 = 0$ Zeilenvertauschungen. Falls $s = r + 2$, sind die Zeilen von $\tilde{A}_{sj}$ gegeben durch $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{r-1}, \tilde{Z}_r, \tilde{Z}_{r+1}, \tilde{Z}_{r+3}, \dots, \tilde{Z}_n$. Weil in diesem Fall $\tilde{Z}_{r+2} = \tilde{Z}_r$ ist, brauchen wir genau $|s-r| - 1 = 1$ Zeilenvertauschung. Es ist einfach zu sehen, dass im Allgemeinen genau $|s-r| - 1$ Zeilenvertauschungen gebraucht werden. Nach Satz 4.2.1 und nach Induktionsannahme erhalten wir, dass $\det(\tilde{A}_{sj}) = (-1)^{|s-r|-1} \det(\tilde{A}_{rj}) = (-1)^{r-s-1} \det(\tilde{A}_{rj})$ und

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) + (-1)^{s+j} a_{sj} \det(\tilde{A}_{sj}) = \\ &= (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) + (-1)^{r+j-1} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) = 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.2.1

- Wenn $n = 1$ haben wir $\det(a) = a$.
- Wenn $n = 2$ dann

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a \cdot \det(d) + (-1)^{2+1} c \cdot \det(b) = a\,d - b\,c.$$

In diesem Fall haben wir die Entwicklung nach der 1-ten Spalte gewählt. Falls wir die Entwicklung nach der 2-ten Spalte wählen haben wir

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} b \cdot \det(c) + (-1)^{2+2} d \cdot \det(a) = a\,d - b\,c.$$

(Natürlich, durch Eindeutigkeit geben die zwei Entwicklungen dasselbe Ergebnis.)

- Es sei $n = 3$, und nehmen wir die Entwicklung nach der 1-ten Spalte, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&+ (-1)^{3+1} a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).
\end{aligned}$$

Jetzt möchten wir folgenden Satz beweisen:

Satz 4.2.5
Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

1. *A ist invertierbar genau dann, wenn* $\det(A) \neq 0$.

2. *Es gilt* $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

3. *Wenn A invertierbar ist, dann gilt* $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

4. *Es gilt* $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis. 1. In Proposition 4.2.3 haben wir schon bewiesen, dass falls A nicht invertierbar ist, dann $\det(A) = 0$ oder, äquivalent gesagt, dass falls $\det(A) \neq 0$, A invertierbar ist. Wir müssen noch beweisen, dass falls A invertierbar ist, dann $\det(A) \neq 0$. Es seien $E_1, \ldots, E_N$ Elementarmatrizen, sodass $E_n \cdots E_1 A = I_n$. Bemerken wir, dass $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\det(E_N \cdots E_1 A) \neq 0$. Das ist eine Folgerung aus Korollar 4.2.2. Weil $\det(I_n) = 1$, können wir schließen, dass $\det(A) \neq 0$.

Vorlesung 18 - 19.12.16

2. Zuerst beweisen wir, dass $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, falls A invertierbar ist. Es seien $E_1, \ldots, E_N$ Elementarmatrizen, sodass $E_N \cdots E_1 A = I_n$, also $A = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1}$. Weil die Inversen der Elementarmatrizen noch Elementarmatrizen sind, impliziert Korollar 4.2.2 ($\det(EA) = \det(E)\det(A)$), dass

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1^{-1} \cdots E_N^{-1} B) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_N^{-1}) \det(B) = \\
&= \det(E_1^{-1} \cdots E_N^{-1}) \det(B) = \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

Falls A nicht invertierbar ist, wissen wir schon, dass $r(A) < n$ (Satz 4.1.4) und $\det(A) = 0$ (Proposition 4.2.3). Wir möchten beweisen, dass $A \cdot B$ nicht invertierbar ist. In der Tat impliziert Proposition 4.1.3 Teil 1. $(r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\})$, dass $r(AB) < n$. Also AB ist nicht invertierbar (Satz 4.1.4) und $\det(AB) = 0$ (Proposition 4.2.3), deshalb $\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A)\det(B)$.

3. Es sei A invertierbar. Dann $A^{-1}A = I_n$, und $\det(A^{-1})\det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1$. Ähnlich ist $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

4. Zuerst bemerken wir, dass A invertierbar ist, genau dann wenn A^T invertierbar ist. Das ist eine Folgerung aus dem Satz 4.1.4, und $r(A) = r(A^T)$. Falls A nicht invertierbar ist, dann $\det(A) = \det(A^T) = 0$ (Proposition 4.2.3). Nehmen wir an, dass A invertierbar ist. Es seien $E_1, \ldots, E_N$ Elementarmatrizen, sodass $A = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1}$. Dann $\det(A) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_N^{-1})$. Andererseits $A^T = (E_N^{-1})^T \cdots (E_1^{-1})^T$, und weil $\det(E^T) = \det(E)$ (Korollar 4.2.2) und weil die Inversen der Elementarmatrizen noch Elementarmatrizen sind, haben wir dass

$$\det(A^T) = \det((E_N^{-1})^T) \cdots \det((E_1^{-1})^T) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_N^{-1}) = \det(A).$$

□

Bemerkung 4.2.5
Eine Folgerung des Satzes 4.2.5 1. ist:
Um zu beweisen, dass $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar ist, genügt es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{K})$ zu finden, sodass $BA = I_n$ (oder sodass $AB = I_n$). In diesem Fall $B = A^{-1}$.
In der Tat, um zu beweisen, dass A invertierbar ist, sollen wir eine Matrix B finden, sodass $AB = I_n$ (B heißt die rechte Inverse von A) *und* $CA = I_n$ (C heißt die linke Inverse von A). Dann muss $C = C(AB) = (CA)B = B$ sein (also, muss die rechte Inverse gleich die linke Inverse sein), und $B = A^{-1}$. Falls wir nur die Gleichung $BA = I_n$ (bzw. $AB = I_n$) haben, können wir nicht direkt beweisen, dass $AB = I_n$ (bzw. $BA = I_n$) auch gilt. Aber Satz 4.2.5 1. und 2. impliziert, dass falls $BA = I_n$, dann $\det(B)\det(A) = 1$, also $\det(A) \neq 0$ und A ist invertierbar. In diesem Fall muss B die Inverse A^{-1} sein, weil $B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}$.

Korollar 4.2.6
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, dann

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(\tilde{A}_{ji}) \quad \textit{(Entwicklung nach der j-ten Zeile).}$$

Beweis. Nach dem Satz 4.2.5, 4. haben wir, dass $\det(A) = \det(A^T)$. Es sei a_{ij}^T das Element von A^T in ihrer i-ten Zeile und j-ten Spalte, also $a_{ij}^T = a_{ji}$. Außerdem $(\widetilde{A^T})_{ij} = (\tilde{A}_{ji})^T$, also $\det((\widetilde{A^T})_{ij}) = \det((\tilde{A}_{ji})^T) = \det(\tilde{A}_{ji})$ und wir erhalten

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}^T \det((\widetilde{A^T})_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(\tilde{A}_{ji}).$$

□

4.2.2 Die Cramersche Regel

In diesem Abschnitt führen wir eine Formel ein, die uns die Inverse einer Matrix zu berechnen erlaubt. Zuerst definieren wir eine neue Matrix.

Definition 4.2.2
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir definieren die *Adjunkte* $adj(A) \in M_n(\mathbb{K})$ der Matrix A als die Matrix, deren Elemente $(adj(A))_{ij}$ gegeben sind durch

$$(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ji}) .$$

Beispiel 4.2.2
Es sei $n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{dann} \quad \tilde{A}_{11} = (d), \;\; \tilde{A}_{12} = (c), \;\; \tilde{A}_{21} = (b), \;\; \tilde{A}_{22} = (a)\, , \mathit{und}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bemerken wir, dass

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_2$$

Diese Tatsache gilt in jeder Dimension.

Satz 4.2.7 (Cramersche Regel)
Für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$ gilt

$$A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n .$$

Falls A invertierbar ist, dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) .$$

Beweis. Es seien $Z_1, \dots, Z_i, \dots, Z_j, \dots, Z_n \in \mathbb{K}^n$ die Zeilenvektoren von A. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ definieren wir die Matrix C^{ij}, deren Zeilenvektoren gegeben sind durch $Z_1, \dots, Z_i, \dots, Z_i, \dots, Z_n \in \mathbb{K}^n$ (also ersetzen wir die j-te Zeile von A mit der i-ten Zeile). Bemerken wir, dass

$$(\widetilde{C^{ij}})_{jk} = \tilde{A}_{jk} .$$

Es sei c^{ij}_{jk} das Element der Matrix C^{ij} in ihrer j-ten Zeile und k-ten Spalte, und a_{ik} das Element von A in ihrer i-ten Zeile und k-ten Spalte. Dann gilt

$$c^{ij}_{jk} = a_{ik}.$$

Nach Korollar 4.2.6 berechnen wir die Determinante von C^{ij} mit der Entwicklung nach der j-ten Zeile und wir erhalten

$$\begin{aligned} \det(C^{ij}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} c^{ij}_{jk} \det((\widetilde{C^{ij}})_{jk}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det(\tilde{A}_{jk}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (adj(A))_{kj} = (A \cdot adj(A))_{ij} \,. \end{aligned}$$

Bemerken wir, dass falls $i = j$ haben wir $C^{ii} = A$, und falls $i \neq j$, dass $\det(C^{ij}) = 0$ (weil C^{ij} zwei gleiche Zeilen hat). Somit gilt

$$(A \cdot adj(A))_{ij} = \det(C^{ij}) = \begin{cases} \det(A) & \text{falls} \quad i = j, \\ \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \,. \end{cases}$$

Also erhalten wir, dass $A \cdot adj(A) = \det(A) I_n$. Falls A invertierbar ist, haben wir $\det(A) \neq 0$ und obige Gleichung ist äquivalent zu

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right) = I_n.$$

Nach Bemerkung 4.2.5 können wir schließen, dass $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$. □

Beispiel 4.2.3
Wir beweisen, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen die Inverse.

Zuerst bemerken wir, dass (durch Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 - 2(3) + (-6) = -11 \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Da $\det(A) \neq 0$ können wir schließen, dass A invertierbar ist. Die Cramersche Regel erlaubt uns, die Inverse zu finden. Wir berechnen die Matrizen $\tilde{A}_{ij}$ und ihre

Determinanten. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{11}) = 1, & \tilde{A}_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{12}) = 3 \\
\tilde{A}_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{13}) = -6, & \tilde{A}_{21} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{21}) = -1 \\
\tilde{A}_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{22}) = -3, & \tilde{A}_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{23}) = -5 \\
\tilde{A}_{31} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{31}) = -4, & \tilde{A}_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{32}) = -1 \\
\tilde{A}_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{33}) = 2,
\end{aligned}
$$

also

$$
adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.
$$

VORLESUNGEN