LINEARE ALGEBRA I

Prof. Dr. Silvia Sabatini

WINTERSEMESTER 2016/17 - Universität zu Köln

February 7, 2017

Warnung!
Es handelt sich hier um *Notizen*: Es wird keine Garantie gegeben für die grammatikalische oder mathematische Korrektheit des Textes. Die Anwendung dieser Notizen erfolgt auf einige Gefahr.

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Vorlesung 1 - 20.10.2016

1.1 Organisation

Vorlesung: Montag - Donnerstag 8-9:30 Uhr, im Hörsaal B (Hörsaalgebäude)

Informationen und Hausarbeiten:
`www.mi.uni-koeln.de/~sabatini` → Lehre → Lineare Algebra.

Sprechstunde während der Vorlesungszeit: montags 16 - 17.00 Uhr im Büro 0.08 des Mathematisches Institut (Weyertal 86-90).

Zuständiger Assistent: Dr. Thomas Rot (thomas.rot@uni-koeln.de).
Sprechstunde: Di 16-17.30 Uhr.

Literaturliste:
G. Fischer, *Lineare Algebra*
K. Jänich, *Lineare Algebra*
S. Waldmann, *Lineare Algebra I*

Notation: Im Folgenden benutzten wir die folgenden Mengen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der *natürlichen Zahlen* (positive ganze Zahlen);
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen;
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: die Menge der *genzen Zahlen*;
$\mathbb{Q}$: die Menge der *rationalen Zahlen* (oder Bruchzahlen);
$\mathbb{R}$: die Menge der *reellen Zahlen*, die in Analysis I definiert werden.

1.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir beginnen unsere Vorlesung mit *Gleichungssystemen*, nämlich Systeme von Gleichungen für mehrere *Unbekannte*. Diese bezeichnet man z.B. mit $x_1, x_2, \cdots x_n$ oder x, y, z (wenn $n \leq 3$).

Beispiel 1.2.1
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

Wir sollten eine *Lösung* dieses Gleichungssystems finden, nämlich *alle Paare reeller Zahlen* (x, y), sodass *beide* Gleichungen oben erfüllt sind.
Um das System zu lösen, könnten wir die *Methode der Substitution* benutzen. Wir erklären diese Methode im obigen Beispiel. Von der zweiten Gleichung erhalten wir $y = -1 + 2x$. Also sollte das y in der ersten Gleichung gleich $-1 + 2x$ sein, und wir erhalten $-x^2 + (-1 + 2x) = 0$, oder äquivalent gesagt, $-(x - 1)^2 = 0$. Deshalb ist $x = 1$ und $y = 1$, und die Lösung ist $(x, y) = (1, 1)$. In der Tat, für $(x, y) = (1, 1)$ sind die obigen Gleichungen *Identitäten*:

$$\begin{cases} -1^2 + 1 = 0 \\ -2 * 1 + 1 = -1 \end{cases}$$

Im Allgemeinen können wir uns die folgenden Fragen stellen:
Gegeben sei ein Gleichungssystem:

1) Hat es Lösungen?

2) Wenn Ja, hat es mehrere Lösungen?

3) Können wir *alle* Lösungen beschreiben?

Gleichungssysteme können im Allgemeinen sehr schwer oder unmöglich zu lösen sein! Aber wir können die obigen Fragen für *Lineare* Gleichungssysteme beantworten.

Definition 1.2.1 • Ein *lineares Gleichungssystem* mit n Unbekannten und m Gleichungen ist ein Gleichungssystem der folgenden Gestalt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.2.1}$$

wobei a_{ij} und b_i sind bekannte reelle Zahlen ($a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$) für alle $1 \leq i \leq m$, und $1 \leq j \leq n$, und $x_1, \ldots, x_n$ die n Unbekannte.

- Eine *Lösung* dieses Systems ist ein geordnetes n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ von reellen Zahlen, das alle m Gleichungen erfüllt.

- Ein lineares Gleichungssystem heißt *homogen*, wenn $b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Bemerkung 1.2.1 • Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer die sogenannte "*triviale Lösung*"

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Ist das lineare Gleichungssystem homogen, dann ist ($\Longrightarrow$) $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ eine Lösung.

- Umgekehrt, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ eine Lösung von einem linearen Gleichungssystem ist, dann ($\Longrightarrow$) ist das System homogen.
Wir können schließen, dass

Ein lineares Gleichungssystem ist homogen $\iff$ $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ ist eine Lösung.

Ein lineares Gleichungssystem (nicht zwingend homogen) kann: 1) keine Lösung, 2) genau eine Lösung, 3) unendlich viele Lösungen haben. Wir betrachten die folgenden Beispiele:

Beispiel 1.2.2 1) Das System

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

hat keine Lösung (es gibt kein Paar (x, y), sodass *die beiden* Gleichungen erfüllt sind).

2) Das System

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

hat genau eine Lösung, nämlich $(x, y) = (1/2, 1/4)$ (Methode der Substitution).

3) Das System

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

hat unendlich viele Lösungen. In der Tat ist jedes Paar, (x, y), das die erste Gleichung erfüllt, eine Lösung der zweiten Gleichung. Also können wir die zweite Gleichung auslassen und lösen nur die Gleichung $x + 2y = 1$. Wir schreiben dies als $x = 1 - 2y$ und betrachten y als Parameter $t \in \mathbb{R}$, also $x = 1 - 2t$. Es sollte jetzt klar sein, dass wir unendlich viele Lösungen haben, nämlich alle Paare $(1 - 2t, t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

1.3 Der Gauß-Jordan-Algorithmus

Wenn wir wenige Gleichungen und Unbekannte haben, ist die Methode der Substitution effizient, um die Lösungen zu finden. Aber im Allgemeinen können wir diese Methode nicht benutzen und brauchen eine Vereinfachung des Systems. Zuerst sollten wir lineare Gleichungssysteme einführen, für die es einfacher ist, eine Lösung zu finden (*Zeilenstufenform*). Dann betrachten wir einen Algorithmus, der uns sagt, dass jedes lineare Gleichungssystem entweder keine Lösung hat oder "äquivalent" zu einem System in Zeilenstufenform ist.

1.3.1 Lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform

Definition 1.3.1
Ein lineares Gleichungssystem hat *Zeilenstufenform*, wenn es folgender Gestalt ist:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases} \tag{1.3.1}$$

wobei $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

Insbesondere ist $m \leq n$. Wir analysieren die zwei Fälle: $m = n$ und $m < n$.

(A) Nehmen wir an, dass $m = n$. Dann ist das System folgender Gestalt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2m}x_m = b_2 \\ & \qquad \vdots \\ & + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Nach Voraussetzung ist $a_{mm} \neq 0$. Dann gibt die letzte Gleichung in (1.3.2) $x_m = \dfrac{b_m}{a_{mm}}$. In der vorletzten Zeile sind die einzigen Unbekannten x_{m-1} und x_m. Deswegen können wir den gefundenen Wert für x_m substituieren, und den Wert für x_{m-1} finden. In der drittletzten Zeile haben wir nur die Unbekannten x_{m-2}, x_{m-1} und x_m. Dann können wir die gefundenen Werte für x_{m-1} und x_m substituieren und den Wert für x_{m-2} finden. Man kann dieses Verfahren iterieren und findet eine Lösung des Systems (1.3.2).

Bemerkung 1.3.1
Wir sollten bemerken, dass in diesem Fall (nämlich für lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform mit m Unbekannten und m Gleichungen) das System eine Lösung hat und diese Lösung eindeutig ist.

Beispiel 1.3.1
(A) Lösen wir das folgende System:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ \qquad 2y - 5z = 4 \\ \qquad\qquad 3z = 2 \end{cases}$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir $z = \frac{2}{3}$; substituieren wir diesen Wert für z in der zweiten Zeile, also $2y - 5\frac{2}{3} = 4$ dann erhalten wir $y = \frac{11}{3}$. Wir ersetzen die gefundenen Werte für y und z in der ersten Zeile und finden $x = \frac{23}{3}$. Also ist die Lösung des Systems gleich $(\frac{23}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3})$.

(B) Es sei $m < n$. Dann können wir (1.3.1) schreiben als

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - (a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - (a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad + a_{mm}x_m = b_m - (a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n) \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Gegeben seien beliebige reelle Werte $t_{m+1}, \ldots, t_n$ für die Unbekannten $x_{m+1}, \ldots, x_n$ Wir erhalten das folgende Gleichungssystem in Zeilenstufenform mit m Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$ und m Gleichungen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - (a_{1m+1}t_{m+1} + \cdots + a_{1n}t_n) \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - (a_{2m+1}t_{m+1} + \cdots + a_{2n}t_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad + a_{mm}x_m = b_m - (a_{mm+1}t_{m+1} + \cdots + a_{mn}t_n) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Dann kann man das Verfahren in **(A)** benutzen, um eine Lösung des Systems (1.3.4) zu finden. Wir bemerken, dass in diesem Fall die Werte für $x_1, \ldots, x_m$ von

$t_{m+1}, \ldots, t_n$ abhängen. Genauer gesagt ist $x_m = \dfrac{b_m - (a_{mm+1}t_{m+1} + \cdots + a_{mn}t_n)}{a_{mm}}$ usw. die Lösung für (1.3.3) der Gestalt

$$(P_1(t_{m+1}, \ldots, t_n), P_2(t_{m+1}, \ldots, t_n), \ldots, P_m(t_{m+1}, \ldots, t_n), t_{m+1}, \ldots, t_n) \tag{1.3.5}$$

wobei $P_1, \ldots, P_m$ ersten Grades Polynome in $t_{m+1}, \ldots, t_n$ sind. Weil die Werte der Parameter $t_{m+1}, \ldots, t_n$ beliebig sind, das System (1.3.3) unendlich viele Lösungen hat, (1.3.5) die man erhält, wenn man die n-m Parameter $t_{m+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ variiert, sagen wir, dass (1.3.3) ∞^{n-m} Lösungen hat.

Beispiel 1.3.2
(B) Lösen wir das folgende System (mit $m = 2$ Gleichungen und $n = 3$ Unbekannten)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ \qquad 2y - 5z = 4 \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Wir können z als einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachten, und lösen

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 - t \\ \qquad 2y = 4 + 5t \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Für jedes feste t, hat das System (1.3.7) zwei Gleichungen und zwei Unbekannte (x und y). Aus der letzten Zeile erhalten wir $y = 2 + \frac{5}{2}t$, und mit der Hilfe der ersten Zeile haben wir $x = \frac{22+13t}{4}$. Also ist die Menge aller ∞^1 Lösungen des Systems (1.3.6) gegeben durch

$$\left\{ \left(\frac{22 + 13t}{4}, 2 + \frac{5}{2}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.3.8}$$

Fragen und Vertiefungen 1.3.1
In der Mathematik ist es immer "gefährlich" eine Auswahl zu treffen, das heißt: wenn wir eine Auswahl getroffen haben, sollten wir immer nachprüfen, dass das, was wir gefunden oder bewiesen haben, unabhängig von unserer Auswahl ist!

In Beispiel 1.3.2 haben wir gesagt: "Wir können z als einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachten", aber das ist eine Auswahl! Ist die Menge aller Lösungen von (1.3.6) unabhängig von dieser Wahl? Wir hätten y als einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ wählen können und lösen

$$\begin{cases} 2x + z = 5 + 3s \\ \qquad -5z = 4 - 2s \end{cases} \tag{1.3.9}$$

Sie können nachprüfen, dass die Menge der Lösungen des Systems (1.3.9) gegeben ist durch

$$\left\{ \left(\frac{13s + 29}{10}, s, \frac{2s - 4}{5} \right), s \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.3.10}$$

Sind die zwei Mengen (1.3.8) und (1.3.10) diesselben?

Vorlesung 2 - 24.10.2016

1.3.2 Beschreibung des Gauß-Jordan-Algorithmus

Wie wir schon gesagt haben, wenn ein lineares Gleichungssystem Lösungen hat, erlaubt uns der Gauß-Jordan-Algorithmus, ein lineares Gleichungssystem mit einem neuen "äquivalenten" linearen Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu wechseln. Zuerst, was ist ein äquivalentes lineares Gleichungssystem?

Definition 1.3.2
Zwei lineare Gleichungssysteme heißen *äquivalent*, wenn wir die beiden Systeme mit folgenden Operationen ineinander überführen können:

(1) Vertauschung von (zwei oder mehr) Zeilen;

(2) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor der ungleich Null ist;

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile von einer anderen.

Wir bezeichnen diese Operationen mit folgender Notation:

(1) Vertauschung von i-Zeile Z_i und j-Zeile Z_j: $Z_i \leftrightarrow Z_j$;

(2) Multiplikation einer Zeile Z mit einem Faktor $\lambda \neq 0$: λZ

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile von einer anderen: $Z_i + \lambda Z_j$, mit $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.3.2
Es gibt eine vierte "triviale" Operation: Wenn eine Zeile des Systems der Gestalt ist $0 = 0$ (nämlich gibt es $i \in \{1, \ldots, m\}$ sodass $a_{ij} = 0$ für alle j, und $b_i = 0$), können wir diese Zeile löschen.

Bemerken Sie, dass wenn das System eine Zeile der Gestalt $0 = b_i$ hat, mit $b_i \neq 0$, ist die Menge der Lösungen leer.

Wir sollten etwas sehr wichtiges bemerken: die drei Operationen oben sind *umkehrbar*! Als Folgerung haben wir die folgende:

Proposition 1.3.1
Äquivalente lineare Gleichungssysteme haben dieselbe Menge der Lösungen.

Beweis: Es seien Σ_1 und Σ_2 die Mengen der Lösungen von zwei äquivalenten linearen Gleichungssystemen. Wir müssen beweisen, dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, oder äquivalent gesagt, dass $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(1): Es sollte klar sein, dass die Menge der Lösungen eines linearen Gleichungssystems unabhängig von der Ordnung der Zeilen ist.

(2): Es sei Σ_1 die Menge der Lösungen des Systems

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.3.11}$$

und Σ_2 die Menge der Lösungen des Systems

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots \\ \lambda(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) & = \lambda b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.3.12}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es sei $(y_1, \dots, y_n) \in \Sigma_1$, also $a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \cdots + a_{jn}y_n = b_j$ für alle $j = 1, \dots, m$. Insbesondere ist $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = b_i$ und daher $\lambda(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) = \lambda b_i$. Wir erhalten $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Bis jetzt haben wir nicht benutzt, dass $\lambda \neq 0$. Aber, um zu beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, muss $\lambda \neq 0$ sein! (*) In der Tat, wenn $\lambda \neq 0$ ist, können wir die i-Zeile durch λ dividieren (Operation (2) ist umkehrbar), und erhalten (1.3.11) zurück. Deshalb können wir dasselbe Verfahren wie oben benutzen um zu beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(3): Es sei (1.3.11) das System mit der Menge der Lösungen gegeben durch Σ_1. Jetzt nehmen wir ein neues System (1.3.11)', wobei die Zeilen $Z_1, \dots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \dots, Z_m$ dieselben des Systems (1.3.11) sind, und die neue i-Zeile Z_i' gegeben ist durch $Z_i + \lambda Z_j$, d.h.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j,$$

für einen $j \neq i$ (**). Es sei Σ_2 seine Menge der Lösungen. Wenn $(y_1 \dots, y_n) \in \Sigma_1$, dann ist $a_{h1}y_1 + a_{h2}y_2 + \cdots + a_{hn}y_n = b_h$ für alle $h = 1, \dots, m$, insbesondere $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = b_i$ und $a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \cdots + a_{jn}y_n = b_j$. Deshalb erhalten wir, dass $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n + \lambda(a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \cdots a_{jn}y_n) = b_i + \lambda b_j$ ist, und $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Um zu beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, benutzen wir die Tatsache, dass die Operation (3) umkehrbar ist. In der Tat, ist $Z_i' - \lambda Z_j$ genau Z_i. Mit demselben Verfahren wie oben können wir beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, also $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

$\square$

Fragen und Vertiefungen 1.3.2

(a) Im Teil (2) dieses Beweises haben wir gesagt, dass $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, unabhängig von $\lambda \neq 0$ oder $\lambda = 0$. Aber, um zu beweisen dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, brauchen wir im Allgemeinen, dass $\lambda \neq 0$ (*). Warum?

(a1) Finden Sie zwei Systeme wie in (1.3.11) und (1.3.12) mit $\lambda = 0$, sodass $\Sigma_1 \subsetneq \Sigma_2$.

(a2) Finden Sie zwei Systeme wie in (1.3.11) und (1.3.12) mit $\lambda = 0$, sodass $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Die Beispiele in (a1) und (a2) zeigen uns, dass wenn $\lambda = 0$ ist, wir nicht sagen können, ob $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ist oder nicht. Wir wissen nur, dass $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$.

(3a) Im Teil (3) dieses Beweises haben wir angenommen, dass $j \neq i$ (**). Warum? Es sei $j = i$ im System (1.3.11)' und Σ_2 seine Menge der Lösungen.

Finden Sie die Werte von λ, sodass $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Es sei (1.2.1) ein lineares Gleichungssystem. Der Gauß-Jordan-Algorithmus hat verschiedene Stufen:

1. Wenn das System eine Zeile der Gestalt $0 = b_i$ hat, können wir entweder die Zeile löschen oder das System hat keine Lösung (Bemerkung 1.3.2). Also können wir annehmen, dass es ein i und j gibt, sodass $a_{ij} \neq 0$. Wenn $j > 1$ können wir die Unbekannten x_j und x_1 wechseln und annehmen dass $a_{i1} \neq 0$ ist.

2. Mit Hilfe der Operation (1) können wir annehmen, dass $a_{11} \neq 0$.

3. Wir multiplizieren die erste Zeile durch a_{11}^{-1} (Operation (2)) und erhalten ein äquivalentes System mit $a_{11} = 1$.

4. Wir substituieren die zweite Zeile Z_2 mit $Z_2 - a_{21}Z_1$, die dritte Zeile Z_3 mit $Z_3 - a_{31}Z_1$.... die m-Zeile Z_m mit $Z_m - a_{m1}Z_1$ und erhalten ein äquivalentes System der Gestalt:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}\right. \tag{1.3.13}$$

Wenn das System eine Zeile der Gestalt $0 = 0$ hat, können wir diese Zeile löschen. Wenn wir eine Zeile der Gestalt $0 = b'_i$ haben, mit $b'_i \neq 0$, dann hat das System (1.3.13), und auch das System (1.2.1) keine Lösung.

5. Wenn $m > 1$, gibt es einen $a'_{ij} \neq 0$, mit $i > 1$. Jetzt können wir die erste Zeile so lassen und arbeiten mit den anderen Zeilen. Ähnlich wie in Stufen 1., 2. und 3. können wir mit Hilfe der Operationen (1), (2) ein neues äquivalentes System der folgenden Gestalt erhalten:

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & x_2 & + & a''_{23}x_3 & + & \cdots & + & a''_{2n}x_n & = & b''_2 \\ & & & & a''_{33}x_3 & + & \cdots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3 \\ & & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & a''_{s3}x_3 & + & \cdots & + & a''_{sn}x_n & = & b''_s \end{array}\right. \tag{1.3.14}$$

Noch einmal: wenn eine Zeile des Systems (1.3.14) der Gestalt $0 = b''_i$ ist, dann im Fall $b''_i \neq 0$ das System (1.3.14) (und so (1.2.1)) keine Lösung hat, ansonsten können wir die Zeile $0 = 0$ löschen.

Durch Wiederholen dieses Verfahrens, erhalten wir entweder ein System ohne Lösungen, oder ein System in Zeilenstufenform (1.3.4). Dann können wir die Methode wie in Sektion 1.3.1 beschrieben benutzen, um die Menge aller Lösungen zu finden.

Beispiel 1.3.3
Lösen wir das System

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Mit dem obigen Verfahren haben wir

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 3Z_1} \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & -3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & -9x_2 & - & 8x_3 & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_2 \to -\frac{1}{3}Z_2}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & & -9x_2 & - & 8x_3 & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 9Z_2} \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & & & & -2x_3 & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{2}Z_3}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Das obige System hat die (eindeutige) Lösung $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$.

Beispiel 1.3.4
Lösen wir das System

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + 4x_2 -{}} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \phantom{{}+ 2x_4} = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \tag{1.3.15}$$

Mit dem obigen Verfahren haben wir

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{2} Z_1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3} \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Das obige System ist in Zeilenstufenform und hat 4 Unbekannte und 2 Gleichungen. Mithilfe der in Sektion 1.3.1 **(B)** beschriebenen Methode, können wir x_2 und x_4 als Parameter t und s nehmen und das folgende System mit 2 Unbekannten (x_1 und x_3) und zwei Gleichungen lösen:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 - 2t \\ \phantom{x_1 -{}} x_3 = 3 - 2s \end{cases} \tag{1.3.16}$$

Sie können nachprüfen, dass die Menge der Lösungen des Systems (1.3.16), und auch des Systems (1.3.15), gegeben ist durch

$$\{(5 - 2t - 2s, t, 3 - 2s, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Also hat das System ∞^2-Lösungen.

Beispiel 1.3.5
Es sei das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{cases} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2}$$

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{cases}$$

Wegen der letzten Zeile hat das System keine Lösung.

Vorlesung 3 - 27.10.2016

Wir schließen dieses Kapitel mit folgender:

Proposition 1.3.2
Es sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.3.17}$$

ein lineares Gleichungssystem. Nehmen wir an, dass die Menge Σ seiner Lösungen nicht leer ist, d.h. es gibt $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, sodass die Gleichungen in (1.3.17) *Identitäten sind.*

Es sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{1.3.18}$$

das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem mit Menge der Lösungen gegeben durch Σ_0.

Dann ist die Menge Σ der Lösungen des Systems (1.3.17) *gegeben durch*

$$y + \Sigma_0 := \{(y_1, \dots, y_n) + (x_1^0, \dots, x_n^0) \mid (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Sigma_0\}.$$

Beweis. Wir sollen beweisen, dass $\Sigma \subseteq y + \Sigma_0$ und $y + \Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

• Es sei $y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in \Sigma$ eine beliebige Lösung des Systems (1.3.17), d.h. $y' \in \Sigma$. Dann haben wir, dass $\sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j = b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Weil $y \in \Sigma$, ganz analog haben wir $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Also

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(y'_j - y_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

und $y' - y = (y'_1 - y_1, \dots, y'_n - y_n)$ ist eine Lösung des Systems (1.3.18), d.h. $y' - y \in \Sigma_0$. Wir schließen, dass $y' = y + (y' - y) \in y + \Sigma_0$, also $\Sigma \subseteq y + \Sigma_0$.

• Es sei $(y_1, \dots, y_n) + (x_1^0, \dots, x_n^0) = (y_1 + x_1^0, \dots, y_n + x_n^0) \in y + \Sigma_0$. Dann haben wir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(y_j + x_j^0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 = b_i + 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Also, $(y_1, \dots, y_n) + (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Sigma$ und $y + \Sigma_0 \subseteq \Sigma$. $\square$

KAPITEL 2

MATRIZEN

2.1 Matrizen: Definitionen und Operationen

Definition 2.1.1

• Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann heißt das "rechteckige Schema"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

eine $m \times n$-Matrix. Hier ist $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ (d.h. dass A eine Matrix mit reellen Koeffizienten ist). Diese $m \times n$ Zahlen heißen die *Einträge* der Matrix. Bezeichnet a_{ij} das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

• Die Menge aller $m \times n$-Matrizen wird durch $M_{m,n}(\mathbb{R})$ bezeichnet sein. Man schreibt dafür

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

oder kurz

$$A = (a_{ij}),$$

wenn die Laufbereiche der Indizes klar sind. Das Paar (m, n) wird der *Typ* der Matrix genannt.

• Die Indizes i und j geben die i-te Zeile und j-te Spalte an. Genauer gesagt, ist die erste Zeile von A gegeben durch $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, die zweite durch $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, …, die m-te durch $(a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{mn})$. Ganz analog ist die j-te Spalte von A gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

• Eine $1 \times n$-Matrix

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

wird *n-dimensionaler Zeilenvektor* genannt. Analog wird eine $m \times 1$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

m-dimensionaler Spaltvektor genannt.

• Eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten wird *quadratische Matrix* genannt. Oft werden wir die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit $M_n(\mathbb{R})$ bezeichnen.

Beispiel 2.1.1
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ \\ \sqrt{3} & \frac{\pi}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

ist eine 2×3-Matrix mit reellen Einträgen, also $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Ihre zwei Zeilen sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\pi}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

und ihre drei Spalten durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Element in der 2-ten Zeile und 1-ten Spalte ist $\sqrt{3}$.

2.1.1 Matrizenaddition

Definition 2.1.2
Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{hk})$ zwei Matrizen. Dann können wir A und B addieren, wenn sie vom selben Typ sind. Also, es sei A des Typs (m, n) und B des Typs (p, q), dann können wir A und B addieren genau dann, wenn $m = p$ und $n = q$. In diesem Fall ist $A + B$ gegeben durch

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Beispiel 2.1.2
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann können wir A und B *nicht* addieren, weil A des Typs $(2, 2)$ ist (also $A \in M_2(\mathbb{R})$) und B des Typs $(2, 3)$.

Die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

können addiert werden (ihr Typ ist in beiden Fällen $(2, 3)$) und ihre Summe gegeben durch

$$C + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 + \pi & -2 \\ \frac{8}{15} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Es sei $(\mathbb{R}, +)$ die Menge aller reellen Zahlen mit Operation $+$ (Addition). Also, ist $+$ eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} +\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *Assoziativität*: Für alle a, b und $c \in \mathbb{R}$ gilt
$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2. *Kommutativität*: Für alle $a, b \in R$ gilt
$$a + b = b + a$$

3. *Existenz des neutralen Elements*: Das Element $0 \in \mathbb{R}$ erfüllt
$$a + 0 = 0 + a = a$$
für alle $a \in \mathbb{R}$.

4. *Existenz des inversen Elements* : Für alle $a \in \mathbb{R}$, gibt es ein Element $b \in \mathbb{R}$, sodass
$$a + b = b + a = 0.$$
Dieses Element ist natürlich gegeben durch $-a$.

Jetzt nehmen wir die Addition $+$, betrachtet als Operation zwischen Matrizen desselben Typs:
$$+\colon M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$$
Wir möchten dieselben Eigenschaften der Operation $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beweisen. Zuerst brauchen wir zwei neue Konzepte.

Definition 2.1.3

• Für jedes Paar (m, n) heißt die Matrix $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, deren Einträge alle gleich Null sind, die *Nullmatrix* (des Typs (m, n)).

• Für jede $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ heißt die Matrix $-A := (-a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ das *(additive) inverse Element.*

Beispiel 2.1.3
Es sei
$$C = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dann

$$-C = \begin{pmatrix} -2 & -\pi & 2 \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und

$$C + (-C) = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -\pi & 2 \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Von der Definition der Matrizenaddition kann man leicht die folgende Proposition nachprüfen.

Proposition 2.1.1
Es sei $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ *die Menge aller reellen Matrizen des Typs* (m, n) *mit Matrizenaddition*

$$\begin{aligned} +\colon M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) &\to M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto A + B. \end{aligned}$$

Dann erfüllt das Paar $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ *folgenden Eigenschaften:*

1. *Assoziativität: Für alle* A, B *und* $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *gilt*

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

2. *Kommutativität: Für alle* $A, B \in M_{m,n}(R)$ *gilt*

$$A + B = B + A$$

3. *Existenz des neutralen Elements: Das Element* $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *erfüllt*

$$A + O = O + A = A$$

   für alle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

4. *Existenz des inversen Elements: Für alle* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *gibt es ein Element* $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$*, sodass*

$$A + B = B + A = O.$$

   Dieses Element ist gegeben durch $-A$.

Fragen und Vertiefungen 2.1.1
Wir haben Matrizen mit *reellen* Koeffizienten definiert, d.h. Matrizen $A = (a_{ij})$ mit $a \in \mathbb{R}$ für alle i und j. Im Prinzip kann man auch Matrizen mit *anderen Koeffizienten* definieren. Zum Beispiel sei K entweder die Menge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$

oder $\mathbb{Q}$. Es sei $M_{m,n}(K)$ die Menge aller Matrizen mit Koeffizienten in K. Natürlich gilt

$$M_{m,n}(\mathbb{N}) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{N}_0) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{Z}) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{Q}) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{N}), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \text{ (und } \notin M_2(\mathbb{N}_0))$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \\ 3 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}), \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ (und } \notin M_2(\mathbb{Q}))$$

Für solche Mengen kann man die Addition + definieren.

• Für welche K erfüllt $(M_n(K), +)$ die vier Eigenschaften in Proposition 2.1.1? Für jede K, beschreiben Sie welche Eigenschaften von Proposition 2.1.1 erfüllt werden und welche nicht.

2.1.2 Skalarmultiplikation

Jetzt wollen wir eine andere Operation definieren, die einen Skalar k (d.h. $k \in \mathbb{R}$) und eine Matrix einbezieht.

Definition 2.1.4
Die *Skalarmultiplikation* ist eine Operation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M_{m,n}(\mathbb{R}) & \to & M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ (k, A) & \mapsto & kA \end{array}$$

wobei die Matrix kA gegeben ist durch (ka_{ij}) für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Hier a_{ij}, für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, bezeichnen die Koeffizienten der Matrix A.

Beispiel 2.1.4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \pi \end{pmatrix} \quad \text{dann} \quad 3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 3\pi \end{pmatrix}$$

Vorlesung 4 - 31.10.2016

Wir haben folgende

Proposition 2.1.2
Die Skalarmultiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:

5. $(h+k)A = hA + kA$ *für alle $h, k \in \mathbb{R}$ und $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;*

6. $h(A+B) = hA + hB$ *für alle $h \in \mathbb{R}$ und $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;*

7. $hkA = h(kA)$ *für alle $h, k \in \mathbb{R}$ und $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;*

8. $1A = A$ *für alle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.*

Beweis. Übung. □

2.1.3 Matrizenmultiplikation

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

ein n-dimensionaler Zeilenvektor, und

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ein n-dimensionaler Spaltvektor. Das *Produkt* dieser Matrizen ist die folgende Zahl:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \,.$$

Im Allgemeinen seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$: also ist die Anzahl der Spalten von A *genau* die Anzahl der Zeilen von B. Dann können wir wie folgt eine neue Matrix definieren, bezeichnet mit $A \cdot B$ (oder kürzer AB), die in $M_{m,p}(\mathbb{R})$ ist. Es seien $A^{(i)}$ die i-te Zeile von A, d.h. $A^{(i)} = (a_{i1}\, a_{i2} \cdots a_{in})$, und $B_{(k)}$ die k-te Spalte von B, d.h.

$$B_{(k)} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

Wie wir oben erklärt haben, können wir $A^{(i)}$ mit $B_{(k)}$ multiplizieren und erhalten

$$C_{ik} := A^{(i)} \cdot B_{(k)} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \in \mathbb{R} \,.$$

Definition 2.1.5
Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Dann ist $A \cdot B$ die Matrix in $M_{m,p}(\mathbb{R})$ definiert als

$$A \cdot B = (C_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le p}}$$

Beispiel 2.1.5
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann können wir $A \cdot B$ *nicht* definieren, weil $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Aber $B \cdot A$ kann definiert werden, und es ist gegeben durch

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 13 & 18 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Bemerkung 2.1.1
Das obige Beispiel sagt uns, dass wenn $A \cdot B$ definiert ist, kann $B \cdot A$ nicht definiert sein.

Im Allgemeinen, wenn $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{r,s}(\mathbb{R})$, dann

- $A \cdot B$ ist definiert (und des Typs (m, s)), genau dann wenn $n = r$;
- $B \cdot A$ ist definiert (und des Typs (r, n)), genau dann wenn $s = m$;
- $A \cdot B$ *und* $B \cdot A$ sind definiert, genau dann wenn $n = r$ *und* $s = m$. *Aber* im Allgemeinen ist

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A!}$$

Zum Beispiel, es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann sind

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 2.1.6

- Das *Kronecker-Delta* (oder *Kronecker-Symbol*) ist das mathematische Zeichen definiert als

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j\,. \end{cases}$$

Dabei können i und j Elemente einer beliebigen Indexmenge I sein.

- Die $n \times n$- *Einheitsmatrix* I_n ist definiert als

$$I_n := (\delta_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel haben wir

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fortan wird das Produkt $A \cdot B$ mit AB bezeichnet.

Satz 2.1.3 *(a) Es seien $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $(A + B)C = AC + BC$*;*
2. $A(C + D) = AC + AD$*;*
3. $A(kC) = k(AC) = (kA)C$*;*
4. $AI_n = A$*,* $I_nC = C$*.*

Eigenschaften 1. und 2. heißen Distributivgesetz.

(b) Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{p,r}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$(AB)C = A(BC)\,. \tag{2.1.2}$$

Eigenschaft (2.1.2) *heißt Assoziativität des Produkts.*

Beweis. (a)
Es seien $A^{(i)} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots a_{in})$ (bzw. $B^{(i)} = (b_{i1}\ b_{i2}\ \cdots b_{in})$) die i-te Zeile von A (bzw. B), wobei $i = 1, \ldots, m$, und

$$C_{(k)} = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

die k-te Spalte von C, wobei $k = 1, \ldots, p$. Das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Matrix $(A + B)C$ ist gegeben durch

$$(A + B)^{(i)}C_{(k)} = (a_{i1} + b_{i1})c_{1k} + (a_{i2} + b_{i2})c_{2k} + \cdots + (a_{in} + b_{in})c_{nk}$$

und das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Matrix $AC + BC$ ist gegeben durch

$$A^{(i)}C_{(k)} + B^{(i)}C_{(k)} = (a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots a_{in}c_{nk}) + (b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \cdots b_{in}c_{nk}),$$

also 1. folgt.

Der Beweis der Eigenschaften 2. und 3. ist eine Übung.

4. Das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix AI_n ist gegeben durch

$$A^{(i)}(I_n)_{(j)} = a_{i1}0 + \cdots a_{ij-1}0 + a_{ij}1 + a_{ij+1}0 + \cdots + a_{in}0 = a_{ij}.$$

Weil i und j beliebig sind, erhalten wir $AI_n = A$. Ähnlich kann man beweisen, dass $I_nC = C$.

(b) Zuerst bemerken wir, dass $AB \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, also können wir die Matrizen AB und C multiplizieren. Ähnlich ist BC in $M_{n,r}(\mathbb{R})$, also können wir A mit BC multiplizieren. Das Element in der i-ten Zeile und h-ten Spalte der Matrix $(AB)C$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} (AB)^{(i)}C_{(h)} & = & (A^{(i)}B_{(1)})c_{1h} + (A^{(i)}B_{(2)})c_{2h} + \cdots + (A^{(i)}B_{(p)})c_{ph} \\ & = & (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1h} + \\ & & +(a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})c_{2h} + \cdots \\ & & \cdots + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{ph} = \\ & = & \sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le p}} a_{ij}b_{jk}c_{kh}\,. \end{array} \tag{2.1.3}$$

wobei $(AB)^{(i)}$ die i-te Zeile der Matrix AB ist.

Andererseits ist das Element in der i-ten Zeile und h-ten Spalte der Matrix $A(BC)$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} A^{(i)}(BC)_{(h)} & = & a_{i1}(B^{(1)}C_{(h)}) + a_{i2}(B^{(2)}C_{(h)}) + \cdots + a_{in}(B^{(n)}C_{(h)}) \\ & = & a_{i1}(b_{11}c_{1h} + b_{12}c_{2h} + \cdots + b_{1p}c_{ph}) + \\ & & +a_{i2}(b_{21}c_{1h} + b_{22}c_{2h} + \cdots + b_{2p}c_{ph}) + \cdots \\ & & \cdots + a_{in}(b_{n1}c_{1h} + b_{n2}c_{2h} + \cdots + b_{np}c_{ph}) = \\ & = & \sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le p}} a_{ij}b_{jk}c_{kh}\,. \end{array} \tag{2.1.4}$$

Weil i und h beliebig sind, nach (2.1.3) und (2.1.4) können wir schließen, dass $(AB)C = A(BC)$.

□

Bemerkung 2.1.2
Nach (2.1.2) folgt, dass das Produkt von mehreren Matrizen definiert werden kann.

Genauer gesagt, seien es $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$. Dann können wir nach (2.1.2) die Matrix $ABC \in M_{m,s}(\mathbb{R})$ entweder als $A(BC)$ oder als $(AB)C$ definieren. Mit anderen Worten, (2.1.2) erlaubt uns, die Klammern zu "vergessen".

Gegeben Matrizen A_i, $i = 1, \ldots, N$, sodass A_i mit A_{i+1} multipliziert werden kann für alle $i = 1, \ldots, N-1$, das Produkt

$$A_1 A_2 \cdots A_N$$

definiert werden kann als, z.B. $(\ldots((A_1A_2)A_3\cdots)A_N)$. Hier "zum Beispiel" bedeutet, dass nach (2.1.2) die Ordnung der Multiplikation gewählt werden kann, weil das Ergebnis dasselbe ist.

1. ______________________________

Vorlesung 5 - 03.11.2016

2.1.4 Die Transponierte einer Matrix

Definition 2.1.7
Es sei A eine Matrix des Typs (m, n). Mit A^T bezeichnen wir die Matrix des Typs (n, m), die als Spaltenvektoren genau die Zeilenvektoren von A hat. Äquivalent gesagt, es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

dann

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Die Matrix A^T wird *Transponierte* der Matrix A genannt.

Beispiel 2.1.6
Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.4
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dann $(A^T)^T = A$.

Beweis. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

dann

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

□

Definition 2.1.8

- Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, falls

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{für alle} \;\; i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{2.1.5}$$

  Also sind die Einträge spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale.

  Mit anderen Worten, ist A symmetrisch genau dann, wenn

$$A^T = A\,.$$

- Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *antisymmetrisch* (oder *schiefsymmetrisch*), falls

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{für alle} \;\; i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{2.1.6}$$

  Mit anderen Worten, ist A antisymmetrisch genau dann, wenn

$$A^T = -A\,.$$

Bemerkung 2.1.3
Gleichung (2.1.6) impliziert, dass wenn A antisymmetrisch ist, dann $a_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel 2.1.7
Die folgenden Matrizen sind symmetrisch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & -7 \end{pmatrix}$$

und die folgenden antisymmetrisch

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ -5 & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fragen und Vertiefungen 2.1.2
In Hausaufgabe 2 sollen Sie beweisen, dass gegeben $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{und} \quad (AC)^T = C^T A^T \,.$$

Mit Hilfe von obigen Gleichungen, beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Seien A und B symmetrische Matrizen, also $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- Ist $A + B$ symmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" geben Sie ein Gegenbeispiel.
- Ist AB symmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" finden Sie Bedingungen von A und B, sodass AB symmetrisch ist.

(ii) Seien A und B antisymmetrische Matrizen, also $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- Ist $A + B$ antisymmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" geben Sie ein Gegenbeispiel.
- Ist AB antisymmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" finden Sie ein Gegenbeispiel.

2.2 Invertierbare Matrizen

Definition 2.2.1
Es sei A eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann sagen wir, dass A *invertierbar* ist, wenn es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass

$$AB = BA = I_n \,. \tag{2.2.1}$$

Die Matrix B heißt die *Inverse* der Matrix A.

Beispiel 2.2.1
Die Matrix I_n ist invertierbar für alle $n \in \mathbb{N}$, mit Inverse gegeben durch I_n.

Satz 2.2.1
Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt:

(a) Die Inverse von A ist eindeutig definiert, d. h. wenn B_1 und B_2 existieren, die (2.2.1) erfüllen, dann $B_1 = B_2$.

Wir bezeichnen mit A^{-1} die Inverse von A.

(b) Die Matrix A^{-1} ist auch invertierbar, und $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Wenn A_1 und A_2 invertierbar sind, dann ist A_1A_2 invertierbar und $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Beweis. (a) Es seien $B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{R})$ die (2.2.1) erfüllen. Dann gilt

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2\,,$$

wobei die obigen Gleichungen gelten aufgrund des Satzes 2.1.3.

(b) Wir sollen *die* Matrix B finden (B ist eindeutig definiert wegen (a)), sodass

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n\,.$$

Weil A^{-1} die Inverse der Matrix A ist, haben wir $A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$, also $B = A$.

(c) Wir sollen die Matrix B finden, sodass $(A_1A_2)^{-1}B = B(A_1A_2)^{-1} = I_n$. Es genügt zu beweisen, dass

$$(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1}) = (A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2) = I_n\,.$$

Wir haben

$$(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1}) = A_1(A_2A_2^{-1})A_1^{-1} = (A_1I_n)A_1^{-1} = A_1A_1^{-1} = I_n\,.$$

Ähnlich kann man beweisen, dass $(A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2) = I_n$. Also ist $(A_1A_2)^{-1}$ genau $A_2^{-1}A_1^{-1}$. $\square$

Fragen und Vertiefungen 2.2.1
Es seien $A_1, \ldots, A_k$ invertierbaren Matrizen. Beweisen Sie, dass $A_1 \cdots A_k$ invertierbar ist, und die Inverse ist gegeben durch $A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Beispiel 2.2.2
(1) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen, dass A invertierbar ist und finden die Inverse A^{-1}. Also sollen wir eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

finden, sodass

$$AB = I_2 \quad \text{und} \quad BA = I_2, \tag{2.2.2}$$

deshalb $B = A^{-1}$. Es sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, wobei a, b, c und d Unbekannte sind. Wir können $AB = I_2$ in folgendes Gleichungssystem umsetzen:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Man kann nachprüfen, dass das System genau eine Lösung hat, die gegeben ist durch $(a, b, c, d) = (-1, 1, 2, -1)$, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Sie können auch nachprüfen, dass $A^{-1}A = I_2$.

(2) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen, dass A *nicht* invertierbar ist. Also, gibt es keine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sodass $AB = I_2 \quad \text{und} \quad BA = I_2$. In der Tat, ist das Gleichungssystem äquivalent zur Gleichung $BA = I_2$ gegeben durch

$$\begin{cases} a + 2b & = 1 \\ 0 & = 0 \\ c + 2d & = 0 \\ 0 & = 1 \end{cases}$$

Nach der letzten Gleichung können wir schließen, dass das System keine Lösung hat. Also ist A nicht invertierbar.

Definition 2.2.2
Die Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ von invertierbaren Matrizen ist bezeichnet durch $GL_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 2.2.1
Wir bemerken, dass:

- Wenn A und B in $GL_n(\mathbb{R})$ sind, dann ist auch AB in $GL_n(\mathbb{R})$ (Satz 2.2.1 (c)).
- $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ (Beispiel 2.2.1).
- Wenn $A \in GL_n(\mathbb{R})$, dann $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ (Satz 2.2.1 (b)).

Fragen und Vertiefungen 2.2.2

- Ist die Nullmatrix $O \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar?
- Gegeben $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ist $-A \in GL_n(\mathbb{R})$?
- Gegeben $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, ist $A + B \in GL_n(\mathbb{R})$?

2.2.1 Invertierbare Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Es sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases} \tag{2.2.3}$$

ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten. Wir können (2.2.3) als

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

schreiben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir an, dass die Matrix A invertierbar ist mit Inverse A^{-1}. Dann hat (2.2.3) eine einzige Lösung $\mathbf{y} = (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n)$, die gegeben ist durch

$$(A^{-1}\mathbf{b})^T .$$

In der Tat, es sei $\mathbf{y} = (A^{-1}\mathbf{b})^T$, dann ist $\mathbf{y}$ eine Lösung des Systems (2.2.3), weil

$$A(\mathbf{y}^T) = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Umgekehrt, es sei $\mathbf{y}' = (y_1'\, y_2'\, \cdots\, y_n')$ eine Lösung des Systems (2.2.3), dann sollen wir beweisen, dass $\mathbf{y}' = (A^{-1}\mathbf{b})^T$. In der Tat haben wir $A(\mathbf{y}')^T = \mathbf{b}$, also $A^{-1}A(\mathbf{y}')^T = A^{-1}\mathbf{b}$, und $(\mathbf{y}')^T = A^{-1}\mathbf{b}$ oder, äquivalent gesagt, $\mathbf{y}' = (A^{-1}\mathbf{b})^T$.

Bemerkung 2.2.2
Wenn $\mathbf{b}$ der Null-Spaltvektor ist, d. h. wenn das System (2.2.3) homogen und A invertierbar ist, dann ist die triviale Lösung die einzige Lösung von (2.2.3).

Vorlesung 6 - 07.11.2016

2.2.2 Umkehrbare Abbildungen und invertierbare Matrizen

Jede $n \times n$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiert eine "Transformation" oder Abbildung von $M_n(\mathbb{R})$ nach $M_n(\mathbb{R})$, die wir mit $\mathcal{L}_A$ bezeichnen. In der Tat, gegeben A, können wir $\mathcal{L}_A$ als

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_A\colon & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & B & \mapsto & A \cdot B \end{array} \tag{2.2.4}$$

definieren, also $\mathcal{L}_A(B) = A \cdot B$ für alle $B \in M_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 2.2.3

- Wir können auch eine Abbildung $\mathcal{R}_A$ als

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{R}_A\colon & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & B & \mapsto & B \cdot A \end{array} \tag{2.2.5}$$

definieren. Bemerken Sie, dass im Allgemeinen $\mathcal{L}_A \neq \mathcal{R}_A$, weil (wenn $n > 1$) die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist!

- Wir haben die Abbildung (2.2.4) (bzw. (2.2.5)) mit $\mathcal{L}_A$ (bzw. mit $\mathcal{R}_A$) bezeichnet, weil wir die Matrix A *links* (bzw. *rechts*) von B multipliziert haben.

Mit der Abbildung $\mathcal{L}_A$ haben wir die Menge $M_n(\mathbb{R})$ in

$$\mathcal{L}_A(M_n(\mathbb{R})) = \{A \cdot B \mid B \in M_n(\mathbb{R})\}$$

"überführt". Zum Beispiel, wenn $A = O$ (die Nullmatrix), dann wird $M_n(\mathbb{R})$ die Menge $\mathcal{L}_O(M_n(\mathbb{R})) = \{O\}$. Natürlich ist die Abbildung $\mathcal{L}_O$ nicht *umkehrbar*, d. h. es gibt keine Matrix C, sodass $\mathcal{L}_C \circ \mathcal{L}_O =$ Identität auf $M_n(\mathbb{R})$. In der Tat haben wir

$$\mathcal{L}_C \circ \mathcal{L}_O(B) = \mathcal{L}_C(O \cdot B) = \mathcal{L}_C(O) = C \cdot O = O \neq B \quad \text{für alle } B \neq O.$$

Ein zweites Beispiel: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathcal{L}_A$ nicht umkehrbar, oder invertierbar. In der Tat haben wir, dass

$$\mathcal{L}_A(B) = \mathcal{L}_A\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}.$$

Also, das Bild $\mathcal{L}_A(B)$ einer beliebigen Matrix B hat dieselben Zeilen, und $\mathcal{L}_A(B)$ ist kein *beliebiges* Element von $M_n(\mathbb{R})$. Sie können nachprüfen, dass diese Tatsache impliziert, dass es keine Matrix C gibt, sodass $\mathcal{L}_C \circ \mathcal{L}_A =$ Identität.

Nun können wir uns fragen: Wann ist die Transformation $\mathcal{L}_A$ *umkehrbar*? Mit anderen Worten, wann ist die Abbildung $\mathcal{L}_A$ *invertierbar*? Genauer gesagt, wann existiert B, so dass

$$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B = \text{Identität auf } M_n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A = \text{Identität auf } M_n(\mathbb{R})? \tag{2.2.6}$$

Wenn eine solche B existiert, bezeichnen wir $\mathcal{L}_B$ mit $\mathcal{L}_A^{-1}$.

Proposition 2.2.2
Es sei A eine invertierbare Matrix. Dann ist $\mathcal{L}_A$ invertierbar und $\mathcal{L}_A^{-1} = \mathcal{L}_{A^{-1}}$.

Beweis. Wir sollen beweisen, dass die Gleichungen in (2.2.6) gelten mit $B = A^{-1}$. Wir haben

$$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_{A^{-1}}(C) = \mathcal{L}_A(A^{-1} \cdot C) = A \cdot (A^{-1} \cdot C) = (A \cdot A^{-1}) \cdot C = I_n \cdot C = C.$$

Weil C eine beliebige Matrix ist, erhalten wir, dass $\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_{A^{-1}} =$ Identität auf $M_n(\mathbb{R})$. Ähnlich kann man nachprüfen, dass $\mathcal{L}_{A^{-1}} \circ \mathcal{L}_A =$ Identität auf $M_n(\mathbb{R})$. □

2.2.3 Elementarmatrizen

Es sei δ_i die m-dimensionale Zeile, deren Einträge a_{ih}, für $h = 1, \ldots, m$, gegeben sind durch δ_{ih} (das Kronecker-Delta). Also hat die Einheitsmatrix I_m Zeilen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ (in dieser Ordnung).

Wir führen drei Typen von Elementarmatrizen ein:

1. Es seien $1 \leq i < j \leq m$. Wir definieren die quadratische Matrix $E_{ij} \in M_m(\mathbb{R})$ als die Matrix, deren Zeilen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_m$ sind. Also

$$E_{ij}^n = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix}.$$

Also können wir E_{ij}^m erhalten durch Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile von I_m.

Beispiel 2.2.3

$$E_{12}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sei $E_i^m(\lambda)$ die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \lambda\delta_i, \ldots, \delta_m$. Also erhalten wir $E_i^m(\lambda)$ von I_m durch Multiplizieren der i-ten Zeile von I_m mit $\lambda \neq 0$.

Beispiel 2.2.4

$$E_1^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Es seien $1 \leq i \neq j \leq m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Matrix $E_{ij}^m(\lambda)$ als die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \delta_i + \lambda\delta_j, \ldots, \delta_j, \ldots, \delta_m$. Also können wir $E_{ij}^m(\lambda)$ von I_m erhalten durch Ersetzen der i-ten Zeile von I_m mit der i-ten Zeile plus λ-Mal die j-te Zeile von I_m.

   Beispiel 2.2.5

$$E_{12}^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{13}^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 2.2.3
Die quadratischen Matrizen E_{ij}^m, $E_i^m(\lambda)$ und $E_{ij}^m(\lambda)$, die wir in 1., 2. und 3. eingeführt haben, heißen *Elementarmatrizen*.

Wenn der Typ der Matrix nicht nötig ist, bezeichnen wir die Elementarmatrizen mit E_{ij}, $E_i(\lambda)$ und $E_{ij}(\lambda)$.

Proposition 2.2.3
Alle Elementarmatrizen sind invertierbar und die Inversen sind Elementarmatrizen. Genauer gesagt,

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \quad E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1}) \quad \textit{und} \quad E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)\,.$$

Beweis: Zuerst beweisen wir, dass $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$. Die h-te Spalte S_h und h-te Zeile Z_h von E_{ij} sind genau die h-te Spalte und h-te Zeile von I_m, für alle $h \notin \{i, j\}$. Weil I_m symmetrisch ist, erhalten wir $Z_h^T = S_h$ für alle $h \notin \{i, j\}$. Es ist einfach zu beweisen, dass $Z_i^T = S_i$ und $Z_j^T = S_j$. Also ist E_{ij} symmetrisch und wir können E_{ij} als

$$E_{ij} = (\delta_1^T \cdots \delta_j^T \cdots \delta_i^T \cdots \delta_m^T)$$

beschreiben. Weil $\delta_h \delta_k^T = \delta_{hk}$ (das Kronecker-Delta) für alle h, k, erhalten wir, dass

$$E_{ij}E_{ij} = (\delta_{hk})_{\substack{1 \leq h \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} = I_m\,.$$

Es ist einfach zu beweisen, dass $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$.

Um zu beweisen dass $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, bemerken wir zuerst, dass die Spalten $S_1, \ldots, S_m$ von $E_{ij}(-\lambda)$ gegeben sind durch $\delta_1^T, \ldots, \delta_i^T, \ldots, (-\lambda\delta_i + \delta_j)^T, \ldots, \delta_m^T$.

Es seien $Z_1, \dots, Z_i = \delta_i + \lambda\delta_j, \dots, Z_j, \dots, Z_m$ die Zeilen von $E_{ij}(\lambda)$. Dann bemerken wir, dass

$$Z_h \cdot S_k = \begin{cases} \delta_h \cdot \delta_k^T = 0 & \text{falls } h \neq k, \text{ und } h, k \notin \{i, j\} \\ (\delta_i + \lambda\delta_j) \cdot \delta_i^T = 1 & \text{falls } h = k = i \\ (\delta_i + \lambda\delta_j) \cdot (-\lambda\delta_i + \delta_j)^T = -\lambda + \lambda = 0 & \text{falls } h = i \text{ und } k = j \\ \delta_j \cdot (-\lambda\delta_i + \delta_j)^T = 1 & \text{falls } h = k = j. \end{cases}$$

Also können wir schließen, dass $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(-\lambda) = I_m$. Ähnlich kann man beweisen, dass $E_{ij}(-\lambda)E_{ij}(\lambda) = I_m$, und die Behauptung folgt. $\square$

Vorlesung 7 - 10.11.2016

Wie wir schon in Sektion 2.2.2 diskutiert haben, definiert jede $m\times m$-Elementarmatrix E eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_E: & M_m(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_m(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & E \cdot A \end{array}$$

die, wegen Propositionen 2.2.2 und 2.2.3, invertierbar ist.

In Sektion 1.3.2, insbesondere in Definition 1.3.2, haben wir drei umkehrbare Operationen auf einem Gleichungssystem eingeführt:

1. Vertauschung von zwei Zeilen des System: $Z_i \leftrightarrow Z_j$;
2. Multiplikation einer Zeile Z mit einem Faktor $\lambda \neq 0$: λZ;
3. Addition des Vielfachen einer Zeile von einer anderen: $Z_i + \lambda Z_j$, mit $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Gegeben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2.2.7}$$

in Sektion 1.3.2 haben wir den Gauß-Jordan Algorithmus eingeführt. Dieser Algorithmus benutzt eine Folge von Operationen 1., 2. und 3., um ein lineares Gleichungssystem– das Lösungen hat– mit einem neuen äquivalenten linearen Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu wechseln. Wir können diesen Algorithmus mit Hilfe von Elementarmatrizen beschreiben.

Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Das System (2.2.7) ist äquivalent zu

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Proposition 2.2.4
Gegeben sei das Gleichungssystem (2.2.7) *und die dazugehörige Matrix A:*

1. *Wenn wir die Zeilen Z_i und Z_j des Systems* (2.2.7) *vertauschen, ist die dazugehörige Matrix des neuen Systems gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{E_{ij}}(A) = E_{ij} \cdot A.$$

2. *Wenn wir eine Zeile Z_i des Systems* (2.2.7) *mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ multiplizieren, ist die dazugehörige Matrix des neuen Systems gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{E_i(\lambda)}(A) = E_i(\lambda) \cdot A.$$

3. *Wenn wir eine Zeile Z_i des Systems* (2.2.7) *mit der Zeile $Z_i + \lambda Z_j$ substituieren (mit $i \neq j$), ist die dazugehörige Matrix des neuen Systems gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{E_{ij}(\lambda)}(A) = E_{ij}(\lambda) \cdot A.$$

Also stimmen Operationen 1., 2. und 3. mit Multiplikation von links mit Elementarmatrizen überein.

Beweis. Übung. $\square$

Fragen und Vertiefungen 2.2.3
Gegeben eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n$, wegen Proposition 2.2.4 hat die Matrix $\mathcal{L}_{E_{ij}}(A) = E_{ij}A$ Zeilen $Z_1, \ldots, Z_j \ldots, Z_i, \ldots, Z_n$. Was können wir sagen, wenn wir die Matrix $\mathcal{R}_{E_{ij}}(A) = AE_{ij}$ nehmen? Es seien $S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_j, \ldots, S_n$ die Spalten von A. Beweisen Sie, dass die Spalten von AE_{ij} gegeben sind durch $S_1, \ldots, S_j, \ldots, S_i, \ldots, S_n$.

Der Gauß-Jordan Algorithmus sagt uns, dass *es eine Folge von Elementarmatrizen* $E_1, \dots, E_N, E'_1, \dots, E'_M$ *gibt, sodass die Matrix* $A' := E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M$ *der folgenden Gestalt*

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

ist, wobei “$*$” eine beliebige reelle Zahl bezeichnet.

Beispiel 2.2.6
Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten Elementarmatrizen finden, sodass $A' := E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M$ der Gestalt (2.2.8) ist.

Der Gauß-Jordan Algorithmus sagt uns, dass wir die zweite und dritte Spalte vertauschen sollten. Wegen Fragen und Vertiefungen (2.2.3), stimmt diese Operation mit Multiplikation von rechts mit Elementarmatrizen E^3_{23} überein, nämlich

$$A \cdot E^3_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt sollen wir die dritte Zeile Z_3 mit $Z_3 - Z_2$ ersetzen (weil wir den Koeffizienten im Platz $(3, 2)$ löschen müssen). Also stimmt diese Operation mit Multiplikation von links mit Elementarmatrizen $E_{32}(-1)$ überein, d.h.

$$E_{32}(-1) \cdot (A \cdot E^3_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A' ist gegeben durch

$$A' = E_{32}(-1) \cdot A \cdot E^3_{23} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es seien $Z_1, \dots, Z_p$ die ersten p-Zeilen von A' die nicht Null sind. Mit Hilfe der Abbildung $\mathcal{L}_{E_{ij}(\lambda)}$, können wir noch A' vereinfachen.

- Nehmen wir die p-te Zeile
$$(0 \ \cdots \ 0 \, 1 \ * \ \cdots \ *)$$
und die $(p-1)$-te Zeile
$$(0 \ \cdots \ 1 \ a_{p-1} \ * \ \cdots \ *).$$
Substituieren wir die Zeile Z_{p-1} mit $Z_{p-1} - a_{p-1}Z_p$. Die neue $(p-1)$-te Zeile Z'_{p-1} ist der Gestalt
$$(0 \ \cdots \ 1 \, 0 \ * \ \cdots \ *).$$
Diese Operation stimmt mit Multiplikation von links mit $E_{p-1\,p}(-a_{p-1})$ überein.
- Die $(p-2)$-te Zeile Z_{p-2} ist der Gestalt $(0 \ \cdots \ 1 \ \ a_{p-2} \ b_{p-2} \ \ * \ \ \cdots \ *)$. Substituieren wir Z_{p-2} mit $Z_{p-2} - b_{p-2}Z_p - a_{p-2}Z'_{p-1}$ und erhalten wir eine neue Zeile der Gestalt $(0 \ \cdots \ 1 \ \ 0 \, 0 \ * \ \cdots \ *)$. Diese Operation stimmt mit Multiplikation von links mit $E_{p-2\,p-1}(-a_{p-2})E_{p-2\,p}(-b_{p-2})$ überein.

Durch Wiederholen dieses Verfahrens, erhalten wir eine Matrix A'' der Gestalt

$$A'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.9)$$

wobei die ersten p-Zeilen und p-Spalten die Einheitsmatrix I_p bilden.

Beispiel 2.2.7
Es sei A' die Matrix in Beispiel 2.2.6. Hier $p = 2$ und die erste Zeile Z_1 ist $(1 \ a_1 \ *) = (1 \ 1 \ 2)$. Um a_1 zu löschen, sollen wir Z_1 mit $Z_1 - a_1 Z_2$ ersetzen. Diese Operation stimmt mit Multiplikation von links mit der Elementarmatrix $E_{12}(-1)$ überein, d.h.

$$E_{12}(-1) \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten 2 Zeilen und 2 Spalten, die Matrix I_2 bilden, also

$$A'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vorlesung 8 - 14.11.2016

Wir können den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Satz 2.2.5
Es sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann sind die folgenden Bedingungen

(i) A ist invertierbar

(ii) A ist das Produkt von Elementarmatrizen

äquivalent.

Beweis. $(ii) \implies (i)$. Es sei A ein Produkt von Elementarmatrizen. Weil jede Elementarmatrix invertierbar ist (Proposition 2.2.3), wegen Satz 2.2.1 (c) (und Fragen und Vertiefungen 2.2.1) ist A invertierbar.

$(i) \implies (ii)$. Es sei A invertierbar, und nehmen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \tag{2.2.10}$$

Weil A invertierbar ist, hat das obige System nur die triviale Lösung (Bemerkung 2.2.2). Also muss die Matrix A'', die wir oben beschrieben haben, die Einheitsmatrix I_m sein. In der Tat, wenn A'' genau $m - p > 0$ Null Zeilen hätte, wäre das dazugehörige homogene System, äquivalent zum System (2.2.10), der folgenden Gestalt

$$\begin{cases} x_1 & & & +a_{p+1\,1}x_{p+1} & + & \cdots & +a_{1m}x_m & = & 0 \\ & x_2 & & +a_{p+1\,2}x_{p+1} & + & \cdots & +a_{2m}x_m & = & 0 \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & x_p & +a_{p+1\,p}x_{p+1} & + & \cdots & +a_{pm}x_m & = & 0 \end{cases}$$

und hätte dieses System mehrere Lösungen.

Mit obigem Verfahren wissen wir, dass es Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_N, E'_1, \dots, E'_M$ gibt, so dass

$$A'' = E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M = I_m\,, \tag{2.2.11}$$

also $E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M (E'_1 \cdots E'_M)^{-1} = (E'_1 \cdots E'_M)^{-1}$ und $E_N \cdots E_1 A = (E'_1 \cdots E'_M)^{-1}$. Von letzter Gleichung erhalten wir, dass

$$A = (E_N \cdots E_1)^{-1} E_N \cdots E_1 A = (E_N \cdots E_1)^{-1} (E'_1 \cdots E'_M)^{-1}.$$

Wegen Satz 2.2.1 (c) (und Fragen und Vertiefungen 2.2.1), und wegen Proposition 2.2.3, können wir schließen, dass A ein Produkt von Elementarmatrizen ist. $\square$

Bemerkung 2.2.4
In obigem Beweis haben wir gezeigt, mit Hilfe vom System (2.2.10) und Bemerkung 2.2.2, dass wenn A invertierbar ist, A'' keine Null-Zeilen haben kann. Es gibt einen zweiten Beweis dieser Tatsache: Man kann bemerken, dass A invertierbar ist genau dann, wenn A'' ist (weil $A'' = E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M$, und Elementarmatrizen sind invertierbar). Jetzt genügt es zu bemerken, dass eine Matrix mit einer Null-Zeile (oder Null-Spalte) nicht invertierbar ist (Sehen Sie Fragen und Vertiefungen 2.2.4).

Bemerkung 2.2.5
Man kann beweisen, dass wenn A invertierbar ist, um A'' in (2.2.9) zu erhalten, braucht man *keine Rechtsmultiplikation*, d.h. wir brauchen keine Matrizen E'_i in (2.2.11). Dies ist eine Folgerung aus der folgenden Tatsache: Der Gauß-Jordan Algorithmus sagt uns, dass wir Rechtsmultiplikation benutzen müssen, wenn es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ gibt, sodass die Matrix A oder $E_k \cdots E_1 A$ der folgenden Gestalt ist:

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \qquad (2.2.12)$$

Aber das ist ein Widerspruch, weil wenn A invertierbar ist, dann sollte auch $E_k \cdots E_1 A$ invertierbar sein, und die Matrizen in (2.2.12) sind *nicht* invertierbar.

Fragen und Vertiefungen 2.2.4
Es ist einfach zu beweisen, dass die Matrix in (a) (also ist die erste Spalte der Null-Spaltvektor) nicht invertierbar ist. In der Tat kann man beweisen, dass eine quadratische Matrix $A \in M_m(\mathbb{R})$ mit einer Spalte (bzw. einer Zeile) die gleich dem Null-Spaltvektor (bzw. dem Null-Zeilenvektor) ist, nicht invertierbar ist. Warum?

Es ist komplizierter zu beweisen, dass eine Matrix der Gestalt (2.2.12) (b) nicht invertierbar ist, und jetzt beweisen wir das nicht.

Fragen und Vertiefungen 2.2.5
Nach Bemerkung 2.2.5 haben wir bewiesen, dass, wenn A invertierbar ist, es eine Folge von Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_N$ gibt, sodass A ein Produkt von Elementarmatrizen ist, nämlich

$$A = (E_N \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1}.$$

Ist dieses Produkt eindeutig? Genauer gesagt, können wir $A = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1} = \widetilde{E}_1^{-1} \cdots \widetilde{E}_M^{-1}$ haben für unterschiedliche Folgen $E_1, \ldots, E_N$ und $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_M$ von Elementarmatrizen?

2.2.4 Eine Methode um die Inverse zu finden

Nach (2.2.11) und Bemerkung 2.2.12, wissen wir, dass wenn $A \in M_m(\mathbb{R})$ invertierbar ist, es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_N$ gibt, sodass

$$E_N \cdots E_1 A = I_m \quad \text{also} \quad A^{-1} = E_N \cdots E_1 \,. \tag{2.2.13}$$

Um $E_N \cdots E_1$ zu finden, gehen wir wie folgt vor:

Es seien $A, B \in M_m(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Dann können wir die folgende Matrix $C \in M_{m,2m}(\mathbb{R})$ bilden:

$$C = (A \;\; B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Wenn $D \in M_m(\mathbb{R})$, kann man nachprüfen, dass die folgende Gleichung gilt

$$D \cdot C = (D \cdot A \quad D \cdot B)\,.$$

Also nehmen wir $B = I_m$ und $D = E_N \cdots E_1$. Nach (2.2.13) folgt dass

$$E_N \cdots E_1 \,(A \quad I_m) = (E_N \cdots E_1 A \quad E_N \cdots E_1) = \begin{pmatrix} I_m & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Daher, um A^{-1} zu finden, genügt es auf I_m dieselben Zeilenoperationen anzuwenden, die wir auf A anwenden, um I_m zu erhalten. Entsprechend genügt es, I_m auf der linken Seite mit demselben Produkt elementarer Matrizen zu multiplizieren, derart dass $E_N \cdots E_1 A = I_m$.

Wir erklären diese Methode mit einem Beispiel:

Beispiel 2.2.8
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dann

$$(A \;\; I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - 2Z_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}Z_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Wir können schließen, dass A invertierbar ist, mit Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass A^{-1} genau $E_{12}(-1)E_2(-\frac{1}{3})E_{21}(-2)$ ist.

Beispiel 2.2.9
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2-3Z_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Null-Zeile hat, ist A nicht invertierbar (sehen Sie Bemerkung 2.2.4).

Beispiel 2.2.10
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann

$$(A \;\; I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3+Z_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-Z_2]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}Z_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1-2Z_3-Z_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Also ist A invertierbar mit Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass $A^{-1} = E_{12}(-1)E_{13}(-2)E_3(\frac{1}{3})E_{32}(-1)E_{31}(1)$.

KAPITEL 3

VEKTORRÄUME

3.1 Gruppen, Ringe und Körper

Definition 3.1.1
Es sei G eine nichtleere Menge. Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$, wobei $*$ eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} *\colon & G \times G & \to & G \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 * g_2 \end{array}$$

ist, sodass gilt:

1. (*Assoziativität von* $*$)
   Die Abbildung $*$ erfüllt
   $$g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$$
2. (*Existenz des neutralen Elements*)
   Es gibt ein Element $e \in G$, sodass
   $$g * e = e * g = g \quad \text{für alle } g \in G\,. \tag{3.1.1}$$
3. (*Existenz des inversen Elements*)
   Für alle $g \in G$, gibt es ein $g' \in G$, sodass
   $$g * g' = g' * g = e\,. \tag{3.1.2}$$

Vorlesung 9 - 17.11.2016

Bemerkung 3.1.1

- Eigenschaft 1. erlaubt uns die Klammern wegzulassen, und wir können definieren
  $$g_1 * g_2 * g_3 \quad \text{als} \quad g_1 * (g_2 * g_3) \quad \text{oder als} \quad (g_1 * g_2) * g_3.$$
  Wenn die Abbildung $*$, die wir benutzt haben, eindeutig ist, bezeichnen wir $g_1 * g_2$ mit $g_1 g_2$.
- Wir können das Produkt $g_1 * g_2 * \cdots * g_N$ von mehreren Elementen definieren, z.B. als
  $$g_1 * g_2 * \cdots g_N := (\cdots((g_1 * g_2) * g_3) * \cdots)\,.$$
  (Sehen Sie Bemerkung 2.1.2.)

Lemma 3.1.1

1. *Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt, d. h. wenn* e_1 *und* e_2 *existieren, die* (3.1.1) *erfüllen, dann* $e_1 = e_2$.

2. *Für alle* $g \in G$ *ist das inverse Element von* g *eindeutig bestimmt, d.h. wenn es* g' *und* g'' *gibt, die* (3.1.2) *erfüllen, dann* $g' = g''$.

Beweis. 1. Nehmen wir (3.1.1) mit $g = e_2$ und $e = e_1$ und erhalten $e_2 * e_1 = e_2$. Jetzt benutzen wir (3.1.1) mit $g = e_1$ und $e = e_2$ und erhalten $e_2 * e_1 = e_1$, also $e_1 = e_2$.

Um *2.* zu beweisen, können wir dieselbe Überlegung anstellen, die wir in Satz 2.2.1 (a) benutzt haben. Also, gegeben $g \in G$, seien g' und g'' zwei Elemente von G, die (3.1.2) erfüllen. Also

$$g' = g' * e = g' * (g * g'') = (g' * g) * g'' = e * g'' = g'' .$$

□

Wir bezeichnen das inverse Element von g mit g^{-1}.

Beispiel 3.1.1
Beispiele und Gegenbeispiele von Gruppen:

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind Gruppen, wobei das neutrale Element (der Addition) 0 ist und das inverse Element von a genau $-a$ ist.

- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe. In der Tat ist die Addition assoziativ, hat ein neutrales Element 0, aber wir können keine Inverse von a finden, für alle $a \neq 0$ (wenn $a \in \mathbb{N}$ dann $-a \notin \mathbb{N}$).

- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ (also rationale Zahlen mit Multiplikation) ist keine Gruppe. In der Tat ist die Multiplikation assoziativ, hat ein neutrales Element (das in diesem Fall 1 ist), aber nicht jede rationale Zahl hat eine (multiplikative) Inverse: für das Element 0, können wir keine rationale Zahl a finden, sodass $a \cdot 0 = 1$, weil $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.

- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe. Wie oben, ist die Multiplikation assoziativ und hat das neutrale Element 1. Dazu, für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, die multiplikative Inverse von a ist $\frac{1}{a}$.

- $(M_n(\mathbb{R}), +)$ ist eine Gruppe (Sehen Sie Proposition 2.1.1, Eigenschaften 1. 3. und 4.).

- $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ist keine Gruppe. In der Tat erfüllt die Multiplikation Eigenschaften Axiome 1. und 2. einer Gruppe (Sehen Sie Satz 2.1.3 *(a)* 4. und *(b)*), aber nicht alle Matrizen besitzen eine multplikative Inverse! Nur die invertierbaren Matrizen, also...

- $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ (die Menge aller invertierbaren Matrizen mit Multiplikation) ist eine Gruppe, die *allgemeine lineare Gruppe*. Bemerken Sie, um diese Behauptung zu beweisen, sollte man auch beweisen, dass das Produkt von zwei invertierbaren Matrizen auch invertierbar ist (nämlich kann man die Multiplikation auf $GL_n(\mathbb{R})$ beschränken; das ist genau Satz 2.2.1 *(c)*). Dazu sollte man beweisen, dass die Inverse einer Matrix in $GL_n(\mathbb{R})$ auch in $GL_n(\mathbb{R})$ ist (Satz 2.2.1 *(b)*).

Bemerkung 3.1.2
Man sollte die Elemente einer Gruppe immer als *invertierbare Abbildungen* sehen. Zum Beispiel haben wir schon bewiesen, dass jedes Element A in $GL_n(\mathbb{R})$ uns eine invertierbare Abbildung $\mathcal{L}_A \colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gibt:

$$A \longrightarrow \mathcal{L}_A.$$

Außerdem können wir die Gruppen $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ und $(\mathcal{L}_., \circ)$ identifizieren (als Gruppen!), d. h.

$$I_n \longrightarrow (\mathcal{L}_{I_n} =)\text{Identität}, \quad A \cdot B \longrightarrow (\mathcal{L}_{A \cdot B} =)\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B, \quad A^{-1} \longrightarrow (\mathcal{L}_{A^{-1}} =)\mathcal{L}_A^{-1}.$$

Fragen und Vertiefungen 3.1.1
Es sei K entweder $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und $M_n(K)$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K.

- Für welche K ist $(M_n(K), +)$ eine Gruppe?

- Es sei $\mathcal{G}_n(K)$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K, die invertierbar sind. Also

$$\mathcal{G}_n(K) = M_n(K) \cap GL_n(\mathbb{R})\,.$$

  Für welche K ist $(\mathcal{G}_n(K), \cdot)$ eine Gruppe?

Definition 3.1.2
Eine Gruppe $(G, *)$ heißt *abelsch* oder *kommutativ*, falls $g*h = h*g$ für alle $g, h \in G$.

Beispiel 3.1.2
$(\mathbb{Z}, +)$, $(M_n(\mathbb{R}), +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen. Die allgemeine lineare Gruppe $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ist nicht abelsch, für alle $n > 1$.

Definition 3.1.3
Es sei R eine nichtleere Menge. Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$, wobei $+$ (die "Addition") und $\cdot$ (die "Multiplikation") zwei Operationen auf R sind, nämlich

$$+\colon \begin{array}{ccc} R\times R & \longrightarrow & R \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \quad \text{und} \quad \cdot\,: \begin{array}{ccc} R\times R & \longrightarrow & R \\ (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array},$$

sodass gilt:

1. $(R, +)$ ist eine *abelsche Gruppe* mit neutralem Element, bezeichnet mit $0 \in R$ und inversem Element von $a \in R$, bezeichnet mit $-a$.

2. Die Multiplikation $\cdot$ ist *assoziativ* (also $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ für alle $a, b, c \in R$) und *besitzt ein neutrales Element*, das wir mit 1 bezeichnen (also $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$).

3. Die Multiplikation $\cdot$ ist *distributiv* über die Addition $+$, nämlich

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\,,$$

und

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)\,.$$

Bemerkung 3.1.3
Manche Autoren verzichten auf die Existenz des neutralen Elements 1 in R.

Fragen und Vertiefungen 3.1.2
Beweisen Sie, dass das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.1.4
Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *kommutativ*, falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$.

Beispiel 3.1.3
- Die Tripel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe.

- Das Tripel $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist ein Ring, der für alle $n > 1$ nicht kommutativ ist.

- Der *Polynomring* $R[x]$. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir können wie folgt einen neuen Ring $(R[x], +, \cdot)$ definieren, der Polynomring genannt wird. Per definitionem ist $R[x]$ die Menge aller endlichen Folgen

$$R[x] := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \mid a_k \in R,\ \ a_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Also, ein Element von $R[x]$ sieht

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

aus. Äquivalent gesagt, ein Element $a \in R[x]$ kann als

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

dargestellt werden, für ein $n \in \mathbb{N}_0$, das von der Folge a abhängt. Also ist $a \in R[x]$ ein *Polynom* mit Koeffizienten in R und Variable x.

Man kann eine Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf $R[x]$ definieren als

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} + (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} := (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

Es ist einfach zu beweisen, dass $(R[x], +, \cdot)$ ein Ring ist, mit $0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ und $-(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (-a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Wenn $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist, dann ist auch $(R[x], +, \cdot)$ kommutativ.

Fragen und Vertiefungen 3.1.3

Es sei I eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ die Menge aller Abbildungen von I nach R, wobei $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist. Definieren wir

$$\begin{array}{rccc} +\colon & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rccc} \cdot\ \colon & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (f,g) & \mapsto & f\cdot g \end{array}$$

als $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in I$.

Ist $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ ein Ring? Wenn Ja, was ist das additive neutrale Element $0 \in \mathcal{A}$? Was ist das multiplikative neutrale Element $1 \in \mathcal{A}$? Und was ist $-f$?

Lemma 3.1.2

Es sei $(R, +, \cdot)$ *ein Ring. Dann*

$$0 \cdot a = 0 \quad \textit{für alle } a \in R\,.$$

Beweis. Weil 0 das neutrale Element der Gruppe $(R, +)$ ist, und nach dem Distributivgesetz folgt, dass

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Es sei $b = 0 \cdot a$ und $-b$ seine (additive) Inverse. Nach der obigen Gleichung $b = b + b$ folgt dass

$$0 = b - b = b + b - b = b + 0 = b$$

und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.1.4

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Nehmen wir an, dass $0 = 1$ (also, ist das additive neutrale Element gleich das multiplikative neutrale Element). Dann $R = \{0\}$. In der Tat sei $a \in R$ ein beliebiges Element in R. Dann, nach Lemma 3.1.2 und nach der Voraussetzung $0 = 1$, folgt, dass

$$0 = 0 \cdot a = 1 \cdot a = a\,.$$

Künftig nehmen wir an, dass $0 \neq 1$ *im Ring* R *(also, hat* R *mindestens zwei Elemente).*

Definition 3.1.5
Es sei $a \in R$ ein Element, das eine multiplikative Inverse hat, d. h. es gibt $b \in R$ sodass $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Dann heißt a eine *Einheit* des Rings $(R, +, \cdot)$. Die Menge aller Einheiten wird mit R^* bezeichnet.

Bemerkung 3.1.5

- Bemerken Sie, dass wenn $0 \neq 1$ in R, dann $R^* \subsetneq R$, weil 0 keine Einheit ist! (Sehen Sie Lemma 3.1.2). Also $R^* \subseteq R \setminus \{0\}$.
- Wenn $a \in R^*$, dann ist die multiplikative Inverse b eindeutig bestimmt. In der Tat, es seien $b, b' \in R$, sodass $a \cdot b = b \cdot a = 1$ und $a \cdot b' = b' \cdot a = 1$. Dann

  $$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot b') = (b \cdot a) \cdot b' = 1 \cdot b' = b'.$$

  Die multiplikative Inverse von a bezeichnen wir mit a^{-1}.

Vorlesung 10 - 21.11.2016

Lemma 3.1.3
Das Paar $(R^*, \cdot)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis. Das Produkt $a \cdot b$ von zwei Einheiten a und b ist noch eine Einheit mit $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. Also können wir die Multiplikation auf R^* einschränken

$$\cdot \ : R^* \times R^* \to R^*.$$

Weil $R^* \subset R$, ist die Assoziativität von $\cdot$ eine Folgerung der Assoziativität der Multiplikation $\cdot$ im Ring R.

Das neutrale multiplikative Element 1 ist natürlich eine Einheit, weil $1 \cdot 1 = 1$. Also $1^{-1} = 1$, und das inverse Element a^{-1} von a ist eine Einheit, mit $(a^{-1})^{-1} = a$. □

Definition 3.1.6

- Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wenn R^* genau $R \setminus \{0\}$ ist, nennen wir $(R, +, \cdot)$ einen *Schiefkörper*. Mit anderen Worten, ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist ein Schiefkörper, falls $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist.
- Ein Schiefkörper $(R, +, \cdot)$, falls R ein kommutativer Ring ist, heißt *Körper*. Mit anderen Worten, ist ein Ring $(R, +, \cdot)$ ein Körper, falls $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

  Wir bezeichnen einen Körper mit $\mathbb{K}$.

Beispiel 3.1.4 1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper, weil $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

3. $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist kein Schiefkörper für alle $n > 1$, weil $M_n(\mathbb{R})^* = GL_n(\mathbb{R}) \subsetneq M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ für alle $n > 1$.

4. *Körper der komplexen Zahlen*: Definieren wir die Menge

$$\mathbb{C} := \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit Addition und Multiplikation gegeben durch

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) &:= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2),\\ (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Also, $\mathrm{i}^2 = -1$, und i heißt *imaginäre Einheit*. Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper. In der Tat ist es einfach nachzuprüfen, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe ist, mit $0 = 0 + \mathrm{i}0$ und $-(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y$. Ferner ist $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit

$$(x + \mathrm{i}y)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}\,.$$

Fragen und Vertiefungen 3.1.4

- Es sei $(R[x], +, \cdot)$ der Polynomring in Beispiel 3.1.3, wobei $R = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$. Was ist $R[x]^*$? Ist $R[x]$ ein Schiefkörper?
- Es sei $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ wie in Beispiel 3.1.3. Was ist $\mathcal{A}^*$? Ist $\mathcal{A}$ ein Schiefkörper?

3.2 Vektorräume

Definition 3.2.1
Es sei V eine nichtleere Menge. Das Tripel $(V, +, \cdot)$ ist ein *Vektorraum* über einem Körper $\mathbb{K}$ (oder $\mathbb{K}$-Vektorraum), falls wir Operationen + ("*Vektoraddition*") und $\cdot$ ("*Skalarmultiplikation*")

$$\begin{array}{rlcl} +\colon & V \times V & \to & V \\ & (v, w) & \mapsto & v + w \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \cdot\colon & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (k, v) & \mapsto & k \cdot v \end{array}$$

definieren können, sodass folgende Eigenschaften gelten:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathbf{0}$ das neutrale Element, und mit $-v$ die (additive) Inverse von $v \in V$.

2. Für alle $u, v \in V$ und $k \in \mathbb{K}$ gilt
$$k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v.$$

3. Für alle $h, k \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt
$$(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v.$$

4. Für alle $h, k \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt
$$(hk) \cdot v = h \cdot (k \cdot v)$$

5. Für alle $v \in V$
$$1 \cdot v = v\,.$$

Die Elemente von V werden *Vektoren* genannt, und diejenigen von $\mathbb{K}$ *Skalare*. Wir bezeichnen $k \cdot v$ mit kv, wobei $k \in \mathbb{K}$ und $v \in V$.

Bemerkung 3.2.1
Bemerken Sie, dass das neutrale Element $\mathbf{0}$ und das inverse Element $-v$ von v eindeutig bestimmt sind, weil $(V, +)$ eine (abelsche) Gruppe ist (Sehen Sie Lemma 3.1.1).

Lemma 3.2.1
Es sei $0 \in \mathbb{K}$, $v \in V$ *ein beliebiger Vektor und* $k \in \mathbb{K}$. *Dann gilt*

$$0\,v = \mathbf{0} \tag{3.2.1}$$
$$k\,\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{3.2.2}$$
$$(-1)v = -v \tag{3.2.3}$$

wobei $-1 \in \mathbb{K}$ *die additive Inverse des multiplikativen neutralen Element* $1 \in \mathbb{K}$ *ist.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.2.1 • Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}^n$ definiert als
$$\mathbb{K}^n := \{(k_1, \ldots, k_n) \mid k_i \in \mathbb{K}\}.$$

Definieren wir zwei Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}^n$ wie folgt
$$\begin{array}{lccc} +: & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & ((k_1, \ldots, k_n), (h_1, \ldots, h_n)) & \mapsto & (k_1 + h_1, \ldots, k_n + h_n) \end{array}$$
und
$$\begin{array}{lccc} \cdot\ : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & (k, (k_1, \ldots, k_n)) & \mapsto & (kk_1, \ldots, kk_n). \end{array}$$
Es ist einfach zu beweisen, dass $\mathbb{K}^n$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

- Die Menge aller Matrizen $M_{m,n}(\mathbb{K})$ mit Addition $+$ und Skalarmultiplikation $\cdot$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und I eine nichtleere Menge. Es sei $\mathcal{A}(I,V)$ die Menge aller Abbildungen $f\colon I \to V$ mit Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert, also: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(k \cdot f)(x) := k \cdot f(x)$, für alle $x \in I$ und $k \in \mathbb{K}$. Es ist einfach zu beweisen, dass mit dieser Addition und Skalarmultiplikation $\mathcal{A}(I,V)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

- (*Polynomräume*) Die Menge aller Polynome $\mathbb{K}[x]$ mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$, mit Addition definiert wie in Beispiel 3.1.3 und Skalarmultiplikation, definiert als
$$k \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i x^i := \sum_{i=0}^{n} k a_i x^i$$
ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

  Es sei $\mathbb{K}[x]_n \subset \mathbb{K}[x]$ die Menge der Polynome, deren Grad durch ein $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist, d. h. ein beliebiges Element $a \in \mathbb{K}[x]_n$ ist der Gestalt $a = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (also, $a_k = 0$ für alle $k > n$). Dann ist $\mathbb{K}[x]_n$, mit Addition und Skalarmultiplikation definiert wie in $\mathbb{K}[x]$, ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Vorlesung 11 - 24.11.2016

Definition 3.2.2
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ eine nichtleere Teilmenge. Dann sagen wir, dass U ein *Untervektorraum* (oder *Unterraum*) von V ist, falls

1. Für alle $v, w \in U$ ist $v + w$ in U (U ist abgeschlossen bezüglich Addition).

2. Für alle $k \in \mathbb{K}$ und $v \in U$ ist kv in U (U ist abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation).

Die obigen Bedingungen sagen uns, dass wir die Addition $+$ und Skalarmultiplikation $\cdot$, die auf V definiert sind, auf U definieren können.

Lemma 3.2.2
Ein Untervektorraum U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \cdot)$, mit Operationen $+$ und $\cdot$, ist selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(U, +, \cdot)$.

Beweis. Zuerst beweisen wir, dass $(U, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Die Addition $+$ ist assoziativ und kommutativ, weil sie assoziativ und kommutativ auf V ist.

Das neutrale Element $\mathbf{0} \in V$ ist ein Element von U. In der Tat, nach Voraussetzung (Eigenschaft 2. in Definition 3.2.2) haben wir, dass $0\,v \in U$ für alle $v \in U$, und nach Lemma 3.2.1, $0\,v = \mathbf{0}$.

Falls $v \in U$, dann ist auch $-v$ ein Element von U. In der Tat, nach Lemma 3.2.1, haben wir, dass $-v = (-1)v$, und $(-1)v$ in U sein muss (Eigenschaft 2. in Definition 3.2.2).

Eigenschaften 2., 3., 4., und 5. der Definition 3.2.1 sind erfüllt, weil sie für den Vektorraum $(V, +, \cdot)$ erfüllt sind. □

Beispiel 3.2.2

- Es sei U_i die Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ gegeben durch
$$U_i := \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_i = 0\}\,, \text{ für ein } 1 \leq i \leq n.$$
Also ist U_i ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

- Es sei U_{hk} die Teilmenge aller Matrizen von $M_n(\mathbb{K}) = \{(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}\}$ mit $a_{hk} = 0$ für ein $1 \leq h \leq n$ und ein $1 \leq k \leq n$. Man kann nachprüfen, dass U_{hk} ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{K})$ ist.

- Es sei $y \in I$ und $\mathcal{A}(I, V)_y$ die Teilmenge aller Abbildungen in $\mathcal{A}(I, V)$, sodass $f(y) = \mathbf{0}$. Dann kann man beweisen, dass $\mathcal{A}(I, V)_y$ ein Untervektorraum von $\mathcal{A}(I, V)$ ist.

- Es sei S_n die Teilmenge aller $n \times n$-symmetrischen Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, d.h. $S_n = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A = A^T\}$. Dann S_n ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{K})$ ist. In der Tat haben wir, dass gegeben $A, B \in S_n$, dann gilt $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, und gegeben $k \in \mathbb{K}$, $(kA)^T = kA^T = kA$.

- Es sei $\mathbb{K}[x]_n$ die Teilmenge aller Polynome in $\mathbb{K}[x]$, deren Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist $\mathbb{K}[x]_n$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}[x]$.

3.2.1 Linearkombinationen und lineare (Un)abhängigkeit

Künftig bezeichnen wir einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ nur V, wenn die Addition $+$ und Skalarmultiplikation $\cdot$ in V klar sind.

Definition 3.2.3

- Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann nennen wir jeden Vektor $v \in V$ der Gestalt
$$v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n, \quad \text{wobei } k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K} \text{ und } v_1, \ldots, v_n \in V,$$
eine *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$ mit Koeffizienten $k_1, \ldots, k_n$.

- Wir bezeichnen die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ mit $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\}$, also

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\} := \{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}\}\,,$$

  und wir sagen, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\}$ der *lineare Spann* von $v_1, \dots, v_n$ ist.

Lemma 3.2.3
Es seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren eines Vektorraumes V über $\mathbb{K}$. Dann ist $U := \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Untervektorraum von V.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass U eine nichtleere Menge ist. Um zu beweisen, dass U ein Untervektorraum von V ist, sollen wir beweisen, dass U abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist. Es seien $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$, mit $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, und $w = l_1 v_1 + \cdots l_n v_n$, mit $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{K}$, also $v, w \in U$. Weil $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} v + w &= k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n + l_1 v_1 + \cdots l_n v_n = k_1 v_1 + l_1 v_1 + \cdots + k_n v_n + l_n v_n = \\ &= (k_1 + l_1) v_1 + \cdots + (k_n + l_n) v_n \in U\,, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

wobei die letzte Gleichung eine Folgerung von Eigenschaft 3. der Definition 3.2.1 ist. Außerdem haben wir, dass

$$kv = k(k_1 v_1 + \cdots k_n v_n) = (kk_1) v_1 + \cdots + (kk_n) v_n \in U\,,$$

wobei die zweite Gleichung eine Folgerung von Eigenschaft 4. der Definition 3.2.1 ist. □

Definition 3.2.4
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in V. Dann sagen wir, dass die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein *endliches Erzeugendensystem* von V ist, falls

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\} = V\,.$$

Also, für jeden Vektor $v \in V$, existieren $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, sodass v als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ mit Koeffizienten $k_1, \dots, k_n$ geschrieben werden kann, d.h.

$$v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n\,.$$

Beispiel 3.2.3
Es sei $V = \mathbb{K}^n$, dann ist ein Erzeugendensystem gegeben durch

$$\{e_1 := (1, 0, \dots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, 0, \dots, 0, 1)\}.$$

In der Tat sei $v = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$, dann $v = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n$.

Bemerkung 3.2.2
- Nicht jeder Vektorraum V besitzt ein endliches Erzeugendensystem. Zum Beispiel, es sei $V = \mathbb{K}[x]$. Nehmen wir an, dass $K[x]$ ein endliches Erzeugendensystem $\{p_1, \ldots, p_n\}$ hätte. Wir sollen einen Widerspruch erhalten. Es sei m das Maximum des Grads der Polynome $p_1, \ldots, p_n$. Bemerken wir, dass

  $$\mathrm{Grad}(k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots k_n p_n) \leq \max\{\mathrm{Grad}(p_1), \mathrm{Grad}(p_2), \ldots, \mathrm{Grad}(p_n)\} = m\,.$$

  Also kann der Polynom x^{m+1} als Linearkombination von $p_1, \ldots, p_n$ nicht geschrieben werden.
- Der Untervektorraum $\mathbb{K}[x]_n$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem (Übung).

Definition 3.2.5
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0 \in \mathbb{K}$ hat.

Falls es auch nicht nur triviale Lösungen gibt, nennt man die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ *linear abhängig*.

Beispiel 3.2.4
- Der Null-Vektor $\mathbf{0} \in V$ ist linear abhängig. In der Tat, nach Lemma 3.2.1, haben wir, dass

  $$k\,\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K}.$$

- Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ in Beispiel 3.2.3 sind linear unabhängig. In der Tat

  $$k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n = (k_1, \ldots, k_n) = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$$

  genau dann, wenn $k_1 = \cdots = k_n = 0$.
- Es seien $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (3, 3, 2)$, $v_3 = (0, 0, 4)$ und $v_4 = (1, 2, 1)$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Es gilt $-3v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$, also sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

  Prüfen Sie nach, dass v_1, v_2 und v_4 linear unabhängig sind (Sie sollten ein lineares Gleichungssystem lösen!).

3.2.2 Basis eines Vektorraums

Definition 3.2.6
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *(endliche) Basis* von V ist ein endliches Erzeugendensystem $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ so dass $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

Beispiel 3.2.5
- Die Menge $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

- Die Menge der Vektoren $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ und $v_3 = (1, 1)$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ (warum?), aber sie sind keine Basis, weil

$$v_1 + v_2 - v_3 = \mathbf{0}\,,$$

  also v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

- Die Vektoren $v_1 = (1, 0, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$ sind keine Basis von $\mathbb{R}^3$, weil $(0, 0, 1) \notin \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$.

Bemerkung 3.2.3
Die Teilmenge $U = \{\mathbf{0}\}$ eines Vektorraums V mit Null-Vektor $\mathbf{0}$ ist selbst ein Vektorraum, weil U ein Untervektorraum von V ist. Bemerken Sie, dass U keine Basis besitzt, weil $\mathbf{0}$ linear abhängig ist.

Wegen Bemerkung 3.2.3 nehmen wir künftig an, dass $V \neq \{\mathbf{0}\}$, sofern nicht anders angegeben.

Fragen und Vertiefungen 3.2.1
Es sei $L_0 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Ist L_0 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Wenn Ja, ist $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ eine Basis von L_0?

Lemma 3.2.4
Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$ und $v \in V$. Dann gibt es eindeutige Skalare $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$.

Die Skalare $k_1, \ldots, k_n$ heißen *Koeffizienten* von v bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$.

Beweis. Da $v_1, \ldots, v_n$ den Vektorraum erzeugen, existieren $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$. Um zu beweisen, dass $k_1, \ldots, k_n$ eindeutig bestimmt sind, seien $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = l_1 v_1 + \cdots + l_n v_n$. Wie müssen beweisen, dass $k_i = l_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Nach

$$k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = l_1 v_1 + \cdots + l_n v_n$$

erhalten wir, dass

$$(k_1 - l_1) v_1 + \cdots + (k_n - l_n) v_n = \mathbf{0}\,.$$

Da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, haben wir, dass $k_i - l_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und die Behauptung folgt. □

Satz 3.2.5
Es sei $V \neq \{\mathbf{0}\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Dann besitzt V eine Basis.

Beweis. Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein (endliches) Erzeugendensystem. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, dann ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Andernfalls, gibt es $(k_1, \ldots, k_n) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$, sodass

$$k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = \mathbf{0}.$$

Weil $(k_1, \ldots, k_n) \neq \mathbf{0}$ ist, gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $k_j \neq 0$. Nach der Gleichung oben folgt, dass

$$v_j = -k_j^{-1}(k_1 v_1 + \cdots + k_{j-1} v_{j-1} + k_{j+1} v_{j+1} + \cdots + k_n v_n)\,.$$

Also, $v_j \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ und wir erhalten, dass

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n\} = V\,.$$

Wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, dann ist eine Basis von V genau gegeben durch $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$. Wenn $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, dann können wir den obigen Schritt wiederholen, und nach endlichen vielen Schritten finden wir eine Basis. □

Vorlesung 12 - 28.11.2016

Fragen und Vertiefungen 3.2.2
Die folgenden Behauptungen sind leicht zu beweisen, und der Beweis ist eine Übung:

1. Der Null-Vektor $\mathbf{0}$ ist der einzige Vektor, der linear abhängig ist.
2. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren. Dann ist $v_i \neq \mathbf{0}$ für alle $1 \leq i \leq n$.
3. Es sei $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann ist $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}$.
4. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:
   "$v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängige Vektoren, mit $n \geq 2$", und
   "existiert $j \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $v_j \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$".

Proposition 3.2.6
Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren eines Vektorraums V. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig für alle $1 \leq m \leq n$. Äquivalent gesagt, wenn $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig sind, dann sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

Beweis. Wir beweisen die zweite Behauptung. Wenn $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig sind, dann existieren $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{K}$ sodass

$$k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m = \mathbf{0}$$

wobei nicht alle Koeffizienten k_i Null sind. Es folgt, dass

$$k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m + 0\, v_{m+1} + \cdots + 0\, v_n = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

wobei nicht alle Koeffizienten der obigen Linearkombination null sind. Es folgt, dass $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind. □

Das Ziel der nächsten Sätze ist zu beweisen, dass für jeden Vektorraum das Konzept von Dimension definiert werden kann. Wir beginnen mit folgenden:

Satz 3.2.7
Es sei $v_1, \dots, v_n$ ein endliches Erzeugendensystem von einem Vektorraum V und $w_1, \dots, w_m$ Vektoren in V. Falls $m > n$, sind $w_1, \dots, w_m$ linear abhängig.

Beweis. Es seien $w_1, \dots, w_n$ die ersten n Vektoren von $w_1, \dots, w_m$. Wenn $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig sind, dann nach Proposition 3.2.6 sind auch $w_1, \dots, w_m$ linear abhängig und wir können den Beweis schließen. Also nehmen wir an, dass $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu beweisen, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \dots, w_n\} = V$. In der Tat, in diesem Fall haben wir

$$w_m = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n\,,$$

und die Gleichung $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n + 0 w_{n+1} + \cdots + 0 w_{m-1} - w_m = \mathbf{0}$ hat eine nicht triviale Lösung (der Koeffizient von w_m ist gleich -1), und $w_1, \dots, w_m$ sind linear abhängig. Im Folgenden beweisen wir, dass

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \dots, w_n\} = V. \tag{3.2.5}$$

Nach Voraussetzung $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\} = V$, also existieren $k_1, \dots, k_n$, sodass

$$w_1 = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n\,.$$

Weil wir angenommen haben, dass $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind, $w_1 \neq \mathbf{0}$ (Fragen und Vertiefungen 3.2.2, 2.), können nicht alle Koeffizienten $k_1, \dots, k_n$ Null sein. Nehmen wir an, dass $k_1 \neq 0$ und erhalten

$$v_1 = k_1^{-1}(w_1 - k_2 v_2 - \cdots - k_n v_n).$$

Deshalb $v_1 \in \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$. Weil $v_2, \dots, v_n \in \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$, erhalten wir, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$. Nach Voraussetzung $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ (Fragen und Vertiefungen 3.2.2, 3.), also

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, v_2, \dots, v_n\} = V\,. \tag{3.2.6}$$

Jetzt beweisen wir, dass

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\} = V \text{ für ein } 1 \le s \le n-1 \implies \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n\} = V, \qquad (3.2.7)$$

und die Behauptung (3.2.5) folgt nach Induktion; (3.2.6) ist genau der Induktionsanfang und (3.2.7) der Induktionsschritt.

Angenommen, dass $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\} = V$ für ein $1 \le s \le n-1$, existieren $h_1, \ldots, h_s, h_{s+1}, \ldots, h_n$ sodass

$$w_{s+1} = h_1 w_1 + \cdots + h_s w_s + h_{s+1} v_{s+1} + h_{s+2} v_{s+2} + \cdots + h_n v_n \,.$$

Weil $w_1, \ldots, w_n$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, müssen, nach Proposition 3.2.6, die Vektoren $w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}$ linear unabhängig sein. Also muss einer der Koeffizienten $h_{s+1}, h_{s+2}, \ldots, h_n$ ungleich Null sein (sonst hätten wir $1 \cdot w_{s+1} - (h_1 w_1 + \cdots + h_s w_s) = \mathbf{0}$). Wir können annehmen, dass $h_{s+1} \neq 0$, und erhalten, dass

$$v_{s+1} = h_{s+1}^{-1}(w_{s+1} - h_1 w_1 - \cdots - h_s w_s - h_{s+2} v_{s+2} - \cdots - h_n v_n) \,.$$

Deshalb erhalten wir, dass $v_{s+1} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n\}$. Da jeder Vektor in $\{w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ ein Element in $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n\}$ ist, erhalten wir, dass

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n\}$$

und (3.2.7) folgt. □

Als Folgerung erhalten wir:

Korollar 3.2.8
Es seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ zwei Basen eines Vektorraums V. Dann $n = m$.

Beweis. Weil $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis ist, erzeugen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ den Vektorraum V. Weil $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis ist, sind die Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig. Also impliziert Satz 3.2.7, dass $m \le n$. Mit derselben Methode können wir beweisen, dass $n \le m$, und die Behauptung folgt. □

Vorlesung 13 - 01.12.2016

Dieses Korollar erlaubt uns, folgende Definition zu geben:

Definition 3.2.7
- Es sei V ein Vektorraum, der eine endliche Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ besitzt. Dann nennen wir n die Dimension von V und bezeichnen sie mit $\dim_{\mathbb{K}}(V)$.
- Es sei $V = \{\mathbf{0}\}$, dann setzen wir $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 0$.
- Falls $V \neq \{\mathbf{0}\}$ keine endliche Basis besitzt, setzen wir $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \infty$.

Beispiel 3.2.6
- Es sei $\mathbb{K}^n = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid k_i \in \mathbb{K}\}$ und $e_1, \ldots, e_n$ wie in Beispiel 3.2.3. Weil $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist, erhalten wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$. Bemerken Sie, dass

  $$(k_1, \ldots, k_n) = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n \,.$$

  Deshalb sind die Koeffizienten des Vektors $(k_1, \ldots, k_n)$ bezüglich der Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ genau die Komponenten $k_1, \ldots, k_n$. Wir nennen die Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die *kanonische Basis* von $\mathbb{K}^n$.

- Der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Matrizen $M_{m,n}(\mathbb{K})$ hat Dimension $m \cdot n$. In der Tat ist eine Basis gegeben durch die Matrizen $\{\Delta_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, wobei der Koeffizient a_{hk} von Δ_{ij} ist gleich 1 falls $h = i$ und $k = j$, und Null falls $h \neq i$ oder $k \neq j$, und

  $$M_{m,n}(\mathbb{K}) \ni A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} \Delta_{ij} \,.$$

- Der Vektorraum $\mathbb{K}[x]$ besitzt keine endliche Basis (Sehen Sie Bemerkung 3.2.2), also $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$. Der (Unter)Vektorraum $\mathbb{K}[x]_n$ der Polynome, deren Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$ ist, hat Dimension n (Übung).

Proposition 3.2.9
Es sei V ein Vektorraum, mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Wenn $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig sind, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

Beweis. Wir sollen nur beweisen, dass $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$. Es sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Nach dem Satz 3.2.7 und nach $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ haben wir, dass $v_1, \ldots, v_n, v$ linear abhängig sind. Also existieren $k_1, \ldots, k_n, k \in \mathbb{K}$, nicht alle Null, sodass

$$k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n + kv = \mathbf{0} \,.$$

Weil nach Voraussetzung $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, muss der Koeffizient k nicht Null sein, also

$$v = k^{-1}(-k_1 v_1 - \cdots - k_n v_n) \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\} \,.$$

Weil v beliebig ist, erhalten wir, dass $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$. $\square$

Proposition 3.2.10 (Basisergänzung)
Es sei V ein Vektorraum, mit $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Wenn $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig sind, dann existieren $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis ist.

Beweis. Nach dem Satz 3.2.7 und nach der Voraussetzung $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ haben wir, dass $k \leq n$. Wenn $k = n$, folgt die Behauptung nach Proposition 3.2.9.

Nehmen wir an, dass $k < n$. Bemerken wir, dass $\{v_1, \ldots, v_k\}$ kein Erzeugendensystem sein kann, sonst würden wir eine Basis mit $k < n$ Elementen erhalten und das ist ein Widerspruch (Sehen Sie Korollar 3.2.8). Deshalb können wir einen Vektor $v_{k+1} \in V$ finden, der nicht in $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist. Wir wollen beweisen, dass $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ linear unabhängig sind. Nehmen wir

$$h_1 v_1 + \cdots + h_k v_k + h_{k+1} v_{k+1} = \mathbf{0}\,.$$

Bemerken wir, dass $h_{k+1} = 0$. In der Tat, falls $h_{k+1} \neq 0$, dann könnten wir v_{k+1} als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ schreiben:

$$v_{k+1} = h_{k+1}^{-1}(-h_1 v_1 - \cdots - h_k v_k)$$

und würden einen Widerspruch erhalten, weil $v_{k+1} \notin \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Weil $h_{k+1} = 0$, müssen wir $h_1 = \ldots = h_k = 0$ haben, weil $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind. Also haben wir bewiesen, dass $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ linear unabhängig sind. Falls $k + 1 = n$, nach Proposition 3.2.9 haben wir, dass $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ eine Basis von V ist. Falls $k + 1 < n$ können wir den obigen Schritt wiederholen und einen Vektor $v_{k+2} \notin \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ finden, sodass $v_1, \ldots, v_{k+1}, v_{k+2}$ linear unabhängig sind. Falls $k + 2 = n$, Proposition 3.2.9 impliziert, dass $\{v_1, \ldots, v_{k+2}\}$ eine Basis von V ist. Andernfalls wiederholen wir den obigen Schritt $(n - k)$-Male, und finden n linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ die, nach Proposition 3.2.9, eine Basis sind. □

3.2.3 Untervektorräume und Basen

Eine weitere Folgerung von Satz 3.2.7 ist

Korollar 3.2.11
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Dann $\dim_{\mathbb{K}}(U) \leq n$, für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U) < \infty$, und es sei $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Basis von U. Weil V ein Erzeugendensystem mit n Elementen besitzt und weil $u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängig sind, impliziert Satz 3.2.7, dass $m = \dim_{\mathbb{K}}(U) \leq n$. Was wir noch beweisen sollten ist, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U) < \infty$. Wenn nicht, seien $u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängige Vektoren. Unsere Voraussetzung ($\dim_{\mathbb{K}}(U) = \infty$) impliziert, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{u_1, \ldots, u_m\} \neq U$. Also können wir einen Vektor $u_{m+1} \in U$ finden, sodass $u_{m+1} \notin \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{u_1, \ldots, u_m\}$ und sodass $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}$ linear unabhängig sind (Sehen Sie den Beweis der Proposition 3.2.10). Durch Wiederholung dieses Verfahrens könnten wir N linear unabhängige Vektoren in $U \subset V$ finden, für alle $N \in \mathbb{N}$, und Satz 3.2.7 sagt uns, dass das ein Widerspruch ist. □

Es seien U und W zwei Untervektorräume eines Vektorraums V. Nach der Definition folgt, dass der Schnitt $U \cap W$ auch ein Vektorraum ist (Sehen Sie Definition 3.2.2). Bemerken Sie, dass der Schnitt immer eine nicht-leere Menge ist (weil $\mathbf{0} \in U \cap V$). In Allgemeinen, gegeben sei eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von Untervektorräumen von V, der Schnitt $\cap_{i \in I} U_i$ ist immer eine nicht-leere Menge und ein Untervektorraum von V.

Die Vereinigung $U \cup W$ von zwei (oder mehreren) Untervektorräumen U und W ist nicht immer ein Untervektorraum. In der Tat, wenn $u \in U$ und $w \in W$, ist die Summe $u+w$ nicht unbedingt in $U \cup W$. Zum Beispiel, es seien $u \neq \mathbf{0}$ und $w \neq \mathbf{0}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$, mit $w \neq \lambda u$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (also, u und w sind nicht proportional). Definieren wir $U := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u\} = \{k\, u \mid k \in \mathbb{R}\}$; also ist U der Untervektorraum aller Vektoren proportional zu u. Ähnlich sei $W := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w\} = \{k\, w \mid k \in \mathbb{R}\}$, der Vektorraum aller Vektoren proportional zu w. Weil u nicht proportional zu w ist folgt, dass $u + w$ nicht proportional ist, weder zu u noch zu w, also $u + w \notin U \cup W$.

Vorlesung 14 - 05.12.2016

Fragen und Vertiefungen 3.2.3
Es seien U und W zwei Untervektorräume eines Vektorraums V. Welche Bedingungen über U und W implizieren, dass $U \cup W$ ein Untervektorraum ist?

Gegeben zwei Untervektorräume U und W, definieren wir

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \ \text{ und } \ w \in W\} .$$

Bemerken Sie, dass für alle $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ und $k \in \mathbb{K}$ wir haben

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

$$k(u_1 + w_1) = ku_1 + kw_1 \in U + W\,,$$

also ist $U+W$ ein Untervektorraum. Wir nennen $U+W$ die *Summe zweier Untervektorräume* U und W. Bemerken Sie, dass $U \cup W \subseteq U+W$, weil $U \ni u = u+\mathbf{0} \in U+W$ und $W \ni w = \mathbf{0} + w \in U + W$.

Falls $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, nennen wir $U + W$ die *direkte Summe* von U und W und wir bezeichnen diese Summe mit $U \oplus W$. Wir haben das folgende:

Lemma 3.2.12
Zu jedem $v \in U \oplus W$, gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$.

Beweis. Es seien $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in W$, sodass $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$. Also $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W$. Weil dieser Schnitt gleich $\mathbf{0}$ ist, erhalten wir, dass $u_1 = u_2$ und $w_1 = w_2$. □

Es seien U und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Das *kartesische Produkt*

$$U \times W := \{(u, w) \mid u \in U \;\text{ und }\; w \in W\}$$

von U und W ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} &(u_1, w_1) + (u_2 + w_2) := (u_1 + u_2, w_1 + w_2) \\ &k(u_1, w_1) := (ku_1, kw_1) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

für alle $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \times W$ und $k \in \mathbb{K}$. Der Nullvektor ist natürlich $(\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_W)$, wobei $\mathbf{0}_U$ der Nullvektor in U und $\mathbf{0}_W$ der Nullvektor in W ist.

Es seien $U' := \{(u, \mathbf{0}_W) \mid u \in U\} \subseteq U \times W$ und $W' := \{(\mathbf{0}_U, w) \mid w \in W\} \subseteq U \times W$. Weil jedes $(u, w) \in U \times W$ gleich $(u, \mathbf{0}_W) + (\mathbf{0}_U, w)$ ist und weil $U' \cap W' = \{(\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_W)\}$ erhalten wir, dass

$$U \times W = U' \oplus W' .$$

Satz 3.2.13
Es seien U und W zwei Untervektorräume eines Vektorraums V, mit $\dim_{\mathbb{K}}(U) < \infty$ *und* $\dim_{\mathbb{K}}(W) < \infty$. *Dann haben die Untervektorräume $U \cap W$ und $U + W$ endliche Dimensionen, und die folgende Formel gilt:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(U + W) + \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) . \tag{3.2.9}$$

Falls $U + W$ die direkte Summe von U und W ist, gilt

$$\dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(U + W). \tag{3.2.10}$$

Formel (3.2.9) heißt die *Grassmann Formel*.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass die Dimension von $U \cap W$ endlich ist, weil $U \cap W$ ein Untervektorraum von U ist, und die Behauptung folgt nach der Voraussetzung $\dim_{\mathbb{K}}(U) < \infty$ und Korollar 3.2.11. Es sei $m := \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W)$. Wir haben zwei Fälle: $m = 0$ und $m \geq 1$. Der erste Fall ist eine Übung. Wir beweisen den zweiten Fall $m \geq 1$.

Es sei $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von $U \cap W$. Nach Proposition 3.2.10 existieren $u_1, \ldots, u_s \in U$ und $w_1, \ldots, w_t \in W$, sodass $\{b_1, \ldots, b_m, u_1, \ldots, u_s\}$ eine Basis von U und $\{b_1, \ldots, b_m, w_1, \ldots, w_t\}$ eine Basis von W ist. Wir bemerken, dass

$$\dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = m + s + t .$$

Also, um (3.2.9) zu beweisen, genügt es zu beweisen, dass $\{b_1, \ldots, b_m, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t\}$ eine Basis von $U + W$ ist. Insbesondere erhalten wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U + W) < \infty$.

Es sei $u + w \in U + W$. Dann existieren Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_s, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \mathbb{K}$, sodass

$$\begin{aligned} u = &\quad \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s \quad \text{und} \\ w = &\quad \alpha'_1 b_1 + \cdots + \alpha'_m b_m + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t, \quad \text{also} \\ u + w = &\quad (\alpha_1 + \alpha'_1) b_1 + \cdots + (\alpha_m + \alpha'_m) b_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s + \\ &\quad \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t \,. \end{aligned}$$

Wir können schließen, dass $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{b_1, \ldots, b_m, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t\} = U + W$. Was wir noch beweisen sollen ist, dass die Vektoren $b_1, \ldots, b_m, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t$ linear unabhängig sind.

Nehmen wir die Linearkombination

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t = \mathbf{0}\,, \tag{3.2.11}$$

also

$$\overbrace{\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t}^{\in W} = -\left(\overbrace{\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m}^{\in U \cap W} + \overbrace{\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s}^{\in U}\right)$$

und die zweite Seite muss in $U \cap W$ sein. Weil $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von $U \cap W$ ist, existieren $\delta_1, \ldots, \delta_m \in \mathbb{K}$, sodass

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s = \delta_1 b_1 + \cdots + \delta_m b_m$$

also

$$(\alpha_1 - \delta_1) b_1 + \cdots + (\alpha_m - \delta_m) b_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s = \mathbf{0}\,.$$

Weil $\{b_1, \ldots, b_m, u_1, \ldots, u_s\}$ eine Basis von U ist, erhalten wir, dass $\alpha_i = \delta_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$. Nach (3.2.11) haben wir, dass

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_t w_t = \mathbf{0}\,.$$

Weil $\{b_1, \ldots, b_m, w_1, \ldots, w_t\}$ eine Basis von W ist, erhalten wir, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $\gamma_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, t$. Also können wir schließen, dass alle Koeffizienten in (3.2.11) Null sind, deshalb ist $\{b_1, \ldots, b_m, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t\}$ eine Basis von $U + W$.

□

Beispiel 3.2.7
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, und $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ und $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \mid z = 0\}$. Weil jede (x, y, z) gleich $(x, 0, z) + (0, y, 0)$ ist, erhalten wir, dass $U + W = \mathbb{R}^3$. Man kann nachprüfen, dass $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1$, weil $U \cap W = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Also ist $\mathbb{R}^3$ keine direkte Summe von U und W, und (3.2.9) gilt.

KAPITEL 4

RANG UND DETERMINANTE EINER MATRIX

4.1 Rang

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer wichtigen

Bemerkung 4.1.1
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ Unbekannten und

$$A\mathbf{x}^T = \mathbf{0} \tag{4.1.1}$$

das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem. Sie haben schon bemerkt, dass die Menge Σ_0 der Lösungen des Systems ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ ist (Sehen Sie Aufgabe 3.6, wobei $\Sigma_0 = \ker(A)$, und man kann annehmen, dass wir einen allgemeinen Körper $\mathbb{K}$ haben). Was wir bemerken möchten ist, dass *die Existenz einer nicht trivialen Lösung des Systems abhängt von der linearen Abhängigkeit der Spalten von A.*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und $S_1 = (a_{11}\ a_{21}\ \cdots\ a_{m1}), S_2 = (a_{12}\ a_{22}\ \cdots\ a_{m2}), \ldots, S_n = (a_{1n}\ a_{2n}\ \cdots\ a_{mn})$ die Spalten von A, betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^m$. Wir bemerken, dass $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ ist genau dann, wenn

$$k_1S_1 + k_2S_2 + \cdots + k_nS_n = \mathbf{0} \in \mathbb{K}^m\,.$$

Wir können schließen, dass

(i) Das System $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ eine nicht triviale Lösung hat genau dann, wenn die Spalten von A (betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^m$) linear abhängig sind.

(ii) Im Allgemeinen sagt uns die Menge der Lösungen des Systems 4.1.1, welche Spalten als Linearkombinationen der anderen Spalten geschrieben werden können.

(iii) Also hängt die Dimension von $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, \ldots, S_n\}$ nur von den Lösungen des Systems $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ ab.

Vorlesung 15 - 08.12.2016

Nachstehend möchten wir folgende Frage beantworten: “Wie viele” Lösungen hat $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$?

Um die obige Frage zu präzisieren, brauchen wir das Konzept vom Rang einer Matrix.

Definition 4.1.1
Es sei A eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$.
Es seien $Z_1 = (a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}), Z_2 = (a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2n}), \ldots, Z_m = (a_{m1}\ a_{12}\ \cdots\ a_{mn})$ ihre Zeilen, betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^n$, und $S_1 = (a_{11}\ a_{21}\ \cdots\ a_{m1})$, $S_2 = (a_{12}\ a_{22}\ \cdots\ a_{m2}), \ldots, S_n = (a_{1n}\ a_{2n}\ \cdots\ a_{mn})$ ihre Spalten, betrachtet als Vektoren in $\mathbb{K}^m$.

- Der *Zeilenrang* von A, bezeichnet mit $z(A)$, ist definiert als die Dimension von $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$.
- Der *Spaltenrang* von A, bezeichnet mit $s(A)$, ist definiert als die Dimension von $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$.

Beispiel 4.1.1
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
Da $Z_2 = 2Z_1$ und $Z_1 \neq \mathbf{0}$, erhalten wir, dass der Zeilenrang gleich 1 ist. Da $S_2 = S_3 = 2S_1$ und $S_1 \neq \mathbf{0}$ erhalten wir, dass der Spaltenrang gleich 1 ist. Also ist der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang. Im folgenden Satz beweisen wir, dass das immer so ist.

Satz 4.1.1
Für jede Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ist der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $z(A) = 0$ genau dann, wenn A die Nullmatrix ist, und $A = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $s(A) = 0$. Wir können nun annehmen, dass $z(A) > 0$. Wie wir schon in Bemerkung 4.1.1 gesagt haben, hängt der Spaltenrang von A nur von der Menge der Lösungen des Systems (4.1.1) ab. Deshalb ändert sich $s(A)$ nicht, wenn wir zwei Zeilen des Systems (4.1.1) vertauschen (Proposition 1.3.1). Jetzt möchten wir folgendes benutzen:

Bemerkung 4.1.2
Es sei $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_m\}) = r$. Dann $r \leq m$ und es existieren r linear unabhängige Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r} \in \{v_1, \ldots, v_m\}$, sodass $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_m\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ (Übung).

Nach dieser Bemerkung wissen wir, dass es $z(A)$ Zeilen von A gibt, sodass ihr Span genau $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ ist. Nehmen wir an, dass genau die erste $z(A)$ Zeilen von A erfüllen $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_{z(A)}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ und definieren wir
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{z(A)1} & a_{z(A)2} & \cdots & a_{z(A)n} \end{pmatrix}.$$

Bemerken wir, dass $z(A) = z(\tilde{A})$. Wir möchten beweisen, dass $s(A) = s(\tilde{A})$. Weil $Z_i \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{Z_1, \ldots, Z_{z(A)}\}$ für alle $i = z(A), \ldots, m$, existieren Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{z(A)}$, sodass $Z_i = \alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_{z(A)} Z_{z(A)}$. Es folgt, dass die Menge der Lösungen des Systems $\tilde{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ enthalten sind in der Menge der Lösungen des Systems (4.1.1). In der Tat, es sei $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ eine Lösung des Systems $\tilde{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$, dann für alle $i = z(A), \ldots, m$

$$Z_i \cdot \mathbf{k}^T = (\alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_{z(A)} Z_{z(A)}) \cdot \mathbf{k}^T = \alpha_1 \overbrace{Z_1 \cdot \mathbf{k}^T}^{=0} + \cdots + \alpha_{z(A)} \overbrace{Z_{z(A)} \cdot \mathbf{k}^T}^{=0} = 0.$$

Umgekehrt ist es leicht zu sehen, dass jede Lösung von (4.1.1) eine Lösung des Systems $\tilde{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}$ ist. Nach Bemerkung 4.1.1 können wir schließen, dass $s(A) = s(\tilde{A})$.

Jetzt bemerken wir, dass die Spalten von $\tilde{A}$ Vektoren in $\mathbb{K}^{z(A)}$ sind. Weil $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{z(A)}) = z(A)$, erhalten wir, dass $s(A) = s(\tilde{A}) \leq z(A)$.

Durch Wiederholung der obigen Argumentation mit A^T anstelle von A, erhalten wir, dass $z(A) = s(A^T) \leq z(A^T) = s(A)$, und die Behauptung folgt. □

Der obige Satz erlaubt uns, folgende Definition zu geben:

Definition 4.1.2
Es sei A eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Ihr *Rang*, bezeichnet mit $r(A)$, ist definiert als ihr Zeilenrang (oder, nach Satz 4.1.1, als ihr Spaltenrang).

Beispiel 4.1.2
Was ist der Rang von $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$? Wir bemerken, dass die Zeilen (und Spalten) von I_n die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ geben, also $r(I_n) = n$.

Bemerkung 4.1.3
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Weil die Zeilen Vektoren in $\mathbb{K}^n$ und die Spalten Vektoren in $\mathbb{K}^m$ sind, nach Satz 4.1.1 erhalten wir, dass

$$r(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Die folgende Proposition ist leicht zu beweisen und ihr Beweis ist eine Übung.

Proposition 4.1.2
Es sei A eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$, und A' eine Matrix in $M_{m,n}(\mathbb{K})$, die von A erhalten werden kann durch folgende "elementare Operationen":

(1) Vertauschung von (zwei oder mehr) Zeilen (bzw. Spalten);

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. einer Spalte) mit einem Faktor der ungleich Null ist;

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile (bzw. einer Spalte) von einer anderen.

(Sehen Sie Definition 1.3.2). Dann gilt

$$r(A) = r(A').$$

Bemerkung 4.1.4
Bemerken Sie, dass die obige Proposition wie folgt formuliert werden kann:

Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $E \in M_m(\mathbb{K})$ eine elementare Matrix. Dann

$$r(A) = r(EA).$$

Es sei $F \in M_n(\mathbb{K})$ eine elementare Matrix, dann

$$r(A) = r(AF).$$

(Vergleichen Sie mit Proposition 2.2.4.)

Proposition 4.1.3 *1. Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Dann*

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

2. Es seien $A \in GL_m(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $C \in GL_n(\mathbb{K})$. Dann

$$r(AB) = r(B) = r(BC).$$

Beweis. 1. Es seien $Z_1(A), \ldots, Z_m(A)$ die Zeilen von A, betrachtet als Zeilenvektoren (also $Z_i \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ für alle i) und $S_1(B), \ldots, S_p(B)$ die Spalten von B, betrachtet als Spaltenvektoren (also $S_h(B) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ für alle h). Durch Definition von Matrixmultiplikation, für alle $i = 1, \ldots, m$ ist die i-te Zeile von AB gegeben durch

$$\begin{aligned} Z(AB)_i &= (Z(A)_i S(B)_1, Z(A)_i S(B)_2, \ldots, Z(A)_i S(B)_p) = \\ &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2}, \ldots, \\ &\quad\; a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np}) = \\ &= a_{i1}Z(B)_1 + a_{i2}Z(B)_2 + \cdots + a_{in}Z(B)_n, \end{aligned}$$

wobei $Z_1(B), \ldots, Z_n(B)$ die Zeilen von B sind, betrachtet als Zeilenvektoren. Also ist die i-te Zeile von AB eine Linearkombination von Zeilen von B. Es folgt, dass

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Z(AB)_1, \ldots, Z(AB)_m\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{Z(B)_1, \ldots, Z(B)_n\},$$

deshalb $r(AB) \leq r(B)$. Um zu beweisen, dass $r(AB) \leq r(A)$, bemerken wir, dass

$$r(AB) = r((AB)^T) = r(B^T A^T) \leq r(A^T) = r(A),$$

und erhalten die Behauptung.

2. Durch die Ungleichung, die wir in 1. bewiesen haben, erhalten wir

$$r(AB) \leq r(B) = r((A^{-1}A)B) = r(A^{-1}(AB)) \leq r(AB),$$

also $r(AB) = r(B)$. Ähnlich kann man beweisen, dass $r(B) = r(BC)$.

□

Was folgt ist der wichtigste Satz dieses Abschnitts:

Satz 4.1.4
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $r(A) = n$.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass A invertierbar ist. Durch Proposition 4.1.3 Teil 2., erhalten wir, dass $r(A) = r(AA^{-1}) = r(I_n) = n$ (Sehen Sie Beispiel 4.1.2).

Jetzt nehmen wir an, dass $r(A) = n$. Also ist die Menge der Zeilen $\{Z(A)_1, Z(A)_2, \dots, Z(A)_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Es seien $Z(I_n)_i \in \mathbb{K}^n$, für $i = 1, \dots, n$, die Zeilen der Einheitsmatrix I_n. Weil $\{Z(A)_1, Z(A)_2, \dots, Z(A)_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist, existieren Koeffizienten $b_{i1}, \dots, b_{in} \in \mathbb{K}$, sodass

$$Z(I_n)_i = b_{i1}Z(A)_1 + b_{i2}Z(A)_2 + \cdots + b_{in}Z(A)_n\,.$$

Es sei $B \in M_n(\mathbb{K})$ die Matrix, deren Koeffizienten gegeben sind durch $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Bemerken wir, dass die obige Gleichung äquivalent ist zu $I_n = BA$. Ähnlich kann man beweisen, dass es $C \in M_n(\mathbb{K})$ gibt, sodass $I_n = AC$. Also $B = B(AC) = (BA)C = C$ und $B = A^{-1}$. Also ist A invertierbar. □

Vorlesung 16 - 12.12.2016

4.2 Die Determinante

Wir möchten eine Abbildung

$$\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

definieren, wobei $\det(A)$ die *Determinante* von A genannt wird. In Satz 4.1.4 haben wir bewiesen, dass A invertierbar ist genau dann, wenn $r(A) = n$. Die Determinante erlaubt uns noch ein Kriterium zu haben, um zu wissen ob A invertierbar ist oder nicht. Insbesondere, was wir beweisen möchten, ist dass

$$A \text{ ist invertierbar genau dann, wenn } \det(A) \neq 0.$$

4.2.1 Definition der Determinante

Es sei $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(D1) $d(I_n) = 1$ (*Normalisierung*);

(D2) Die Abbildung ist *linear in jeder Zeile*: Es seien $Z_1, \ldots, Z_n, \widetilde{Z}_i \in \mathbb{K}^n$ n-dimensionale Zeilenvektoren, dann für alle $1 \leq i \leq n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i + \lambda \widetilde{Z}_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \widetilde{Z}_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

(D3) Wenn $A \in M_n(\mathbb{K})$ zwei gleiche Zeilen hat, dann gilt $d(A) = 0$.

Was wir beweisen möchten ist, dass es genau eine Abbildung d mit obigen Eigenschaften gibt, und d wird die Determinante genannt und bezeichnet mit “ det″.

Bemerkung 4.2.1
Nach Eigenschaft (D2) haben wir, dass *falls eine Zeile von A gleich Null ist, dann* $d(A) = 0$. In der Tat, gegeben die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_{i-1}, \mathbf{0}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n$ von A, und gegeben ein beliebiger Zeilenvektor $Z_i \in \mathbb{K}^n$, dann können wir Z_i als $Z_i + \lambda\mathbf{0}$ schreiben, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, und nach (D2) haben wir

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i + \lambda\mathbf{0} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \mathbf{0} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Weil wir $\lambda \neq 0$ nehmen können, gibt uns die obige Gleichung $d(A) = 0$.

Zuerst beweisen wir folgendes:

Satz 4.2.1
Es sei $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die die Eigenschaften (D2) und (D3) erfüllt, und $E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda) \in GL_n(\mathbb{K})$ die Elementarmatrizen (Sehen Sie Abschnitt 2.2.3). Dann gilt für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. $d(E_{ij} \cdot A) = -d(A)$, *für alle* $1 \leq i \neq j \leq n$.

2. $d(E_i(\lambda) \cdot A) = \lambda\, d(A)$, *für alle* $\lambda \neq 0$ *und* $1 \leq i \leq n$.

3. $d(E_{ij}(\lambda) \cdot A) = d(A)$, *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *und* $1 \leq i \neq j \leq n$.

Beweis. Es seien $Z_1, \ldots, Z_n$ die Zeilen von A, und $1 \leq i < j \leq n$. Nehmen wir die Matrix

$$B := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

Nach Eigenschaft (D3) erhalten wir, dass $d(B) = 0$, und nach Eigenschaft (D2) haben wir, dass

$$\begin{aligned} 0 &= d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_i + Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ nach (D3)}} + \underbrace{d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=d(A)} + \underbrace{d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{d(E_{ij} \cdot A)} + \underbrace{\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ nach (D3)}} = d(A) + d(E_{ij} \cdot A)\,, \end{aligned}$$

und wir erhalten Eigenschaft 1.

Um 2. zu beweisen, seien $Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_n$ die Zeilen von einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, und wir schreiben λZ_i als $\mathbf{0} + \lambda \cdot Z_i$. Nach (D2) und Bemerkung 4.2.1 haben wir, dass

$$d(E_i(\lambda)\cdot A) = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \lambda Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \mathbf{0} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda\, d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda d(A).$$

Jetzt beweisen wir 3. Es seien $Z_1, \dots, Z_i, \dots, Z_n$ die Zeilen von einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann nach (D2)

$$d(E_{ij}(\lambda)\cdot A) = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i + \lambda Z_j \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda d\underbrace{\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_j \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}_{=:B} = d(A) + \lambda d(B).$$

Bemerken wir, dass die i-te und j-te Zeile der letzter Matrix B gleich sind, also ist $d(B) = 0$ nach (D3), und wir erhalten $d(E_{ij}(\lambda)\cdot A) = d(A)$. □

Bemerkung 4.2.2
Mit obigen Tatsachen können wir Eigenschaft (D2) generalisieren: Gegeben Zeilenvektoren $Z_1, \dots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \dots, Z_n \in \mathbb{K}^n$, $Z_i^1, \dots, Z_i^k \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}^n$, gilt

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ \lambda_1 Z_i^1 + \cdots + \lambda_k Z_i^k \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda_1 d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i^1 \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i^k \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

(Übung.)

Korollar 4.2.2
Es sei $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Dann

(a) $d(E_{ij}) = -1$ *für alle* $1 \leq i < j \leq n$;
$d(E_i(\lambda)) = \lambda$ *für alle* $1 \leq i \leq n$ *und* $\lambda \neq 0$;
$d(E_{ij}(\lambda)) = 1$ *für alle* $1 \leq i \neq j \leq n$.

(b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ *und* $E \in GL_n(\mathbb{K})$ *eine Elementarmatrix. Dann*

$$d(E \cdot A) = d(E) \cdot d(A) \quad \textit{und} \quad d(E^T) = d(E).$$

Beweis. Um (a) zu beweisen, genügt es Satz 4.2.1 zu benutzen mit $A = I_n$. Die erste Gleichung in (b) folgt nach Satz 4.2.1 und Korollar 4.2.2 (a). Die zweite Gleichung ist eine Folgerung von Teil (a) und folgender

Bemerkung 4.2.3
Die Elementarmatrizen erfüllen

$$E_{ij}^T = E_{ij}, \quad E_i(\lambda)^T = E_i(\lambda), \quad E_{ij}(\lambda)^T = E_{ji}(\lambda)\,.$$

(Übung.)

□

Die folgende Proposition ist eine wichtige Folgerung aus dem Satz 4.1.4.

Proposition 4.2.3
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ *eine Matrix, die nicht invertierbar ist. Dann muss für jede Abbildung* $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, *die die Eigenschaften (D2) und (D3) erfüllt,* $d(A) = 0$ *sein.*

Beweis. Weil A nicht invertierbar ist, impliziert Satz 4.1.4, dass $r(A) < n$. Also sind die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_n$ von A linear abhängig. Es sei

$$\alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_n Z_n = \mathbf{0}$$

eine Linearkombination, die Null ist. Weil $Z_1, \ldots, Z_n$ linear abhängig sind, gibt es ein $i = 1, \ldots, n$ mit $\alpha_i \neq 0$. Also können wir Z_i als Linearkombination von $Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_n$ schreiben:

$$Z_i = \beta_1 Z_1 + \cdots + \beta_{i-1} Z_{i-1} + \beta_{i+1} Z_{i+1} + \cdots + \beta_n Z_n.$$

Nach Bemerkung 4.2.2 erhalten wir, dass

$$d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \beta_1 d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_1 \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \cdots + \beta_{i-1} d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_{i-1} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \beta_{i+1} d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_{i+1} \\ Z_{i+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \cdots + \beta_n d\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{i-1} \\ Z_n \\ \vdots \\ Z_{i+1} \\ Z_n \end{pmatrix},$$

und nach (D3) ist die rechte Seite Null. □

Bemerken Sie, dass eine Abbildung $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die die Eigenschaften (D2) und (D3) erfüllt, gegeben ist zum Beispiel durch $d(A) = 0$ für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$ (also ist $d(A) = 0$ nicht nur für nicht-invertierbare Matrizen). Aber, wenn wir Eigenschaft (D1) benötigen, möchten wir beweisen, dass es genau eine Abbildung d gibt (die wird die Determinante genannt), und $d \not\equiv 0$, weil (D1) uns sagt, dass $d(I_n) = 1$.

Definition 4.2.1
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Für jede $1 \leq i, j \leq n$ definieren wir die Matrix $\tilde{A}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ als die Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Zum Beispiel sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{dann z. B.} \quad \tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Satz 4.2.4
Es existiert genau eine Abbildung $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$*, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Wir bezeichnen diese Abbildung mit*

$$\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

und nennen $\det(A)$ *die* *<u>Determinante</u>* *von* A*.*

Beweis. *<u>Eindeutigkeit</u>*. Es seien $d\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ und $\tilde{d}\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ zwei Abbildungen, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllen. Wir sollen beweisen, dass $d(A) = \tilde{d}(A)$ für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$. Falls A nicht invertierbar ist, Proposition 4.2.3 impliziert, dass $d(A) = \tilde{d}(A) = 0$. Können wir nun annehmen, dass A invertierbar ist. Es seien $E_1, \ldots, E_n$ Elementarmatrizen, sodass $I_n = E_N \cdots E_1 A$ (Sehen Sie Abschnitt 2.2.3). Nach Eigenschaft (D1) erhalten wir, dass

$$d(E_N \cdots E_1 A) = \tilde{d}(E_N \cdots E_1 A).$$

Wir können nun Korollar 4.2.2 N-Male benutzen (bemerken Sie, dass $d(E) \in \mathbb{K}^*$ für alle Elementarmatrizen E!) um zu zeigen, dass $d(A) = \tilde{d}(A)$.

Vorlesung 17 - 15.12.2016

<u>Existenz</u>. Um die Existenz zu beweisen, genügt es eine Abbildung zu finden, die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt. Weil eine solche Abbildung eindeutig definiert ist, bezeichnen wir sie mit “det”, sie wird *Determinante* genannt. Wir definieren $\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ durch Induktion über n.

Für $n = 1$ kann man leicht beweisen, dass $\det(a) = a$ Eigenschaften (D1)–(D3) erfüllt für alle $(a) \in M_1(\mathbb{K})$. Nehmen wir an, dass wir die Determinante für alle $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen schon definiert haben. Dann definieren wir für $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $j = 1, \ldots, n$

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}) \quad (\textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte}), \qquad (4.2.1)$$

wobei $\tilde{A}_{ij}$ die Matrix in Definition 4.2.1 ist.

Bemerkung 4.2.4
Bemerken Sie, dass wir in (4.2.1) ein $j = 1, \ldots, n$ gewählt haben. Also, apriorisch hängt die rechte Seite in (4.2.1) von j ab. Aber wenn wir beweisen, dass die Abbildung in (4.2.1) die Eigenschaften (D1)–(D3) erfüllt, dann haben wir durch Eindeutigkeit auch bewiesen, dass die Summe in (4.2.1) nicht von j abhängt.

(D1): Wir müssen beweisen, dass $\det(I_n) = 1$. Bemerken Sie, die Einträge von I_n erfüllen $a_{ij} \neq 0$ genau dann, wenn $i = j$, und $a_{jj} = 1$. Ferner ist $(\tilde{I_n})_{jj} = I_{n-1}$. Also per definitionem

$$\det(I_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det((\tilde{I_n})_{jj}) = (-1)^{j+j} a_{jj} \det(I_{n-1}) = \det(I_{n-1}).$$

Weil $\det\colon M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Eigenschaft (D1) (nach Induktionsannahme) erfüllt, erhalten wir, dass $\det(I_n) = \det(I_{n-1}) = 1$.

(D2): Wir müssen die Linearität in jeder Zeile beweisen, d.h. für alle $1 \leq k \leq n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{k-1} \\ Z_k + \lambda \widetilde{Z}_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{k-1} \\ Z_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{k-1} \\ \widetilde{Z}_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Es sei A die Matrix mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k + \lambda \tilde{Z}_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_n$ und $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$ einer der Summanden in (4.2.1). Falls $k \neq i$ bemerken wir, dass nach Induktion $\det(\tilde{A}_{ij})$ linear in der k-ten Zeile (von $\tilde{A}_{ij}$) ist, und a_{ij} nicht von k abhängt. Somit erhalten wir, dass $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$ linear in der k-ten Zeile von A ist. Falls $k = i$, dann ist a_{kj} linear in der k-ten Zeile. Ferner hängt $\tilde{A}_{kj}$ nicht von der k-ten Zeile ab. Also erhalten wir auch in diesem Fall, dass $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$ linear in der k-ten Zeile von A ist. Es folgt, dass $\det(A)$ linear in der k-ten Zeile ist.

(D3): Nehmen wir an, dass die r-te und s-te Zeile von A gleich sind. Bemerken Sie, dass falls $i \neq r$ und $i \neq s$, die Matrix $\tilde{A}_{ij}$ zwei gleiche Zeilen hat. Also ist in diesem Fall $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$ (nach Induktionsannahme), und nach (4.2.1) erhalten wir

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}) = (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) + (-1)^{s+j} a_{sj} \det(\tilde{A}_{sj}).$$

Bemerken Sie, dass die Menge der Zeilen von $\tilde{A}_{rj}$ gleich der Menge der Zeilen von $\tilde{A}_{sj}$ ist. Dass heißt, dass wir $\tilde{A}_{rj}$ in $\tilde{A}_{sj}$ mit Zeilenvertauschung überführen können. Nach Satz 4.2.1 und nach Induktionsannahme wissen wir, dass $\det(E_{jk}\tilde{A}_{sj}) = -\det(\tilde{A}_{sj})$. Also möchten wir berechnen wie viele Vertauschungen wir brauchen, um $\tilde{A}_{rj}$ in $\tilde{A}_{sj}$ überzuführen. Wir erklären diese Berechnung mit einem Beispiel. Es seien $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_n \in \mathbb{K}^{n-1}$ die Zeilen von A ohne j-tes Element (also ohne a_{ij}, für $i = 1, \ldots, n$). Es sei $s = r + 1$. Dann sind die Zeilen von $\tilde{A}_{rj}$ gegeben durch $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_{r-1}, \tilde{Z}_{r+1}, \tilde{Z}_{r+2}, \ldots, \tilde{Z}_n$, und diejenigen von $\tilde{A}_{sj}$ durch $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_{r-1}, \tilde{Z}_r, \tilde{Z}_{r+2}, \ldots, \tilde{Z}_n$. Weil $\tilde{Z}_r = \tilde{Z}_{r+1}$, erhalten wir, dass $\tilde{A}_{rj} = \tilde{A}_{sj}$, und wir brauchen $|s - r| - 1 = 0$ Zeilenvertauschungen. Falls $s = r + 2$, sind die Zeilen von $\tilde{A}_{sj}$ gegeben durch $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_{r-1}, \tilde{Z}_r, \tilde{Z}_{r+1}, \tilde{Z}_{r+3}, \ldots, \tilde{Z}_n$. Weil in diesem Fall $\tilde{Z}_{r+2} = \tilde{Z}_r$ ist, brauchen wir genau $|s - r| - 1 = 1$ Zeilenvertauschung. Es ist einfach zu sehen, dass im Allgemeinen genau $|s - r| - 1$ Zeilenvertauschungen gebraucht werden. Nach Satz 4.2.1 und nach Induktionsannahme erhalten wir, dass $\det(\tilde{A}_{sj}) = (-1)^{|s-r|-1} \det(\tilde{A}_{rj}) = (-1)^{r-s-1} \det(\tilde{A}_{rj})$ und

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) + (-1)^{s+j} a_{sj} \det(\tilde{A}_{sj}) = \\ &= (-1)^{r+j} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) + (-1)^{r+j-1} a_{rj} \det(\tilde{A}_{rj}) = 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.2.1

- Wenn $n = 1$ haben wir $\det(a) = a$.
- Wenn $n = 2$ dann

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a \cdot \det(d) + (-1)^{2+1} c \cdot \det(b) = a\,d - b\,c.$$

  In diesem Fall haben wir die Entwicklung nach der 1-ten Spalte gewählt. Falls wir die Entwicklung nach der 2-ten Spalte wählen haben wir

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} b \cdot \det(c) + (-1)^{2+2} d \cdot \det(a) = a\,d - b\,c.$$

  (Natürlich, durch Eindeutigkeit geben die zwei Entwicklungen dasselbe Ergebnis.)

- Es sei $n = 3$, und nehmen wir die Entwicklung nach der 1-ten Spalte, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&+(-1)^{3+1}a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).
\end{aligned}$$

Jetzt möchten wir folgenden Satz beweisen:

Satz 4.2.5
Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

1. *A ist invertierbar genau dann, wenn* $\det(A) \neq 0$.
2. *Es gilt* $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
3. *Wenn A invertierbar ist, dann gilt* $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
4. *Es gilt* $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis. 1. In Proposition 4.2.3 haben wir schon bewiesen, dass falls A nicht invertierbar ist, dann $\det(A) = 0$ oder, äquivalent gesagt, dass falls $\det(A) \neq 0$, A invertierbar ist. Wir müssen noch beweisen, dass falls A invertierbar ist, dann $\det(A) \neq 0$. Es seien $E_1, \dots, E_N$ Elementarmatrizen, sodass $E_n \cdots E_1 A = I_n$. Bemerken wir, dass $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\det(E_N \cdots E_1 A) \neq 0$. Das ist eine Folgerung aus Korollar 4.2.2. Weil $\det(I_n) = 1$, können wir schließen, dass $\det(A) \neq 0$.

Vorlesung 18 - 19.12.2016

2. Zuerst beweisen wir, dass $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, falls A invertierbar ist. Es seien $E_1, \dots, E_N$ Elementarmatrizen, sodass $E_N \cdots E_1 A = I_n$, also $A = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1}$. Weil die Inversen der Elementarmatrizen noch Elementarmatrizen sind, impliziert Korollar 4.2.2 ($\det(EA) = \det(E)\det(A)$), dass

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1^{-1} \cdots E_N^{-1} B) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_N^{-1})\det(B) = \\
&= \det(E_1^{-1} \cdots E_N^{-1})\det(B) = \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

Falls A nicht invertierbar ist, wissen wir schon, dass $r(A) < n$ (Satz 4.1.4) und $\det(A) = 0$ (Proposition 4.2.3). Wir möchten beweisen, dass $A \cdot B$ nicht invertierbar ist. In der Tat impliziert Proposition 4.1.3 Teil 1. ($r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$), dass $r(AB) < n$. Also AB ist nicht invertierbar (Satz 4.1.4) und $\det(AB) = 0$ (Proposition 4.2.3), deshalb $\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A)\det(B)$.

3. Es sei A invertierbar. Dann $A^{-1}A = I_n$, und $\det(A^{-1})\det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1$. Ähnlich ist $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

4. Zuerst bemerken wir, dass A invertierbar ist, genau dann wenn A^T invertierbar ist. Das ist eine Folgerung aus dem Satz 4.1.4, und $r(A) = r(A^T)$. Falls A nicht invertierbar ist, dann $\det(A) = \det(A^T) = 0$ (Proposition 4.2.3). Nehmen wir an, dass A invertierbar ist. Es seien $E_1, \ldots, E_N$ Elementarmatrizen, sodass $A = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1}$. Dann $\det(A) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_N^{-1})$. Andererseits $A^T = (E_N^{-1})^T \cdots (E_1^{-1})^T$, und weil $\det(E^T) = \det(E)$ (Korollar 4.2.2) und weil die Inversen der Elementarmatrizen noch Elementarmatrizen sind, haben wir dass

$$\det(A^T) = \det((E_N^{-1})^T) \cdots \det((E_1^{-1})^T) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_N^{-1}) = \det(A).$$

□

Bemerkung 4.2.5
Eine Folgerung des Satzes 4.2.5 1. ist:
Um zu beweisen, dass $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar ist, genügt es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{K})$ zu finden, sodass $BA = I_n$ (oder sodass $AB = I_n$). In diesem Fall $B = A^{-1}$.
In der Tat, um zu beweisen, dass A invertierbar ist, sollen wir eine Matrix B finden, sodass $AB = I_n$ (B heißt die rechte Inverse von A) *und* $CA = I_n$ (C heißt die linke Inverse von A). Dann muss $C = C(AB) = (CA)B = B$ sein (also, muss die rechte Inverse gleich die linke Inverse sein), und $B = A^{-1}$. Falls wir nur die Gleichung $BA = I_n$ (bzw. $AB = I_n$) haben, können wir nicht direkt beweisen, dass $AB = I_n$ (bzw. $BA = I_n$) auch gilt. Aber Satz 4.2.5 1. und 2. impliziert, dass falls $BA = I_n$, dann $\det(B)\det(A) = 1$, also $\det(A) \neq 0$ und A ist invertierbar. In diesem Fall muss B die Inverse A^{-1} sein, weil $B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}$.

Korollar 4.2.6
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, dann

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(\tilde{A}_{ji}) \quad \textit{(Entwicklung nach der j-ten Zeile).}$$

Beweis. Nach dem Satz 4.2.5, 4. haben wir, dass $\det(A) = \det(A^T)$. Es sei a_{ij}^T das Element von A^T in ihrer i-ten Zeile und j-ten Spalte, also $a_{ij}^T = a_{ji}$. Außerdem $(\widetilde{A^T})_{ij} = (\tilde{A}_{ji})^T$, also $\det((\widetilde{A^T})_{ij}) = \det((\tilde{A}_{ji})^T) = \det(\tilde{A}_{ji})$ und wir erhalten

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}^T \det((\widetilde{A^T})_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(\tilde{A}_{ji}).$$

□

4.2.2 Die Cramersche Regel

In diesem Abschnitt führen wir eine Formel ein, die uns die Inverse einer Matrix zu berechnen erlaubt. Zuerst definieren wir eine neue Matrix.

Definition 4.2.2
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir definieren die *Adjunkte* $adj(A) \in M_n(\mathbb{K})$ der Matrix A als die Matrix, deren Elemente $(adj(A))_{ij}$ gegeben sind durch

$$(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ji}) \, .$$

Beispiel 4.2.2
Es sei $n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{dann} \quad \tilde{A}_{11} = (d), \quad \tilde{A}_{12} = (c), \quad \tilde{A}_{21} = (b), \quad \tilde{A}_{22} = (a) \, , \mathit{und}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Bemerken wir, dass

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_2$$

Diese Tatsache gilt in jeder Dimension.

Satz 4.2.7 (Cramersche Regel)
Für alle $A \in M_n(\mathbb{K})$ *gilt*

$$A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n \, .$$

Falls A *invertierbar ist, dann*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \, .$$

Beweis. Es seien $Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n \in \mathbb{K}^n$ die Zeilenvektoren von A. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ definieren wir die Matrix C^{ij}, deren Zeilenvektoren gegeben sind durch $Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_i, \ldots, Z_n \in \mathbb{K}^n$ (also ersetzen wir die j-te Zeile von A mit der i-ten Zeile). Bemerken wir, dass

$$(\widetilde{C^{ij}})_{jk} = \tilde{A}_{jk} \, .$$

Es sei c^{ij}_{jk} das Element der Matrix C^{ij} in ihrer j-ten Zeile und k-ten Spalte, und a_{ik} das Element von A in ihrer i-ten Zeile und k-ten Spalte. Dann gilt

$$c^{ij}_{jk} = a_{ik}.$$

Nach Korollar 4.2.6 berechnen wir die Determinante von C^{ij} mit der Entwicklung nach der j-ten Zeile und wir erhalten

$$\begin{aligned}\det(C^{ij}) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}c^{ij}_{jk}\det((\widetilde{C^{ij}})_{jk}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}\det(\tilde{A}_{jk}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot(adj(A))_{kj} = (A\cdot adj(A))_{ij}\,.\end{aligned}$$

Bemerken wir, dass falls $i = j$ haben wir $C^{ii} = A$, und falls $i \neq j$, dass $\det(C^{ij}) = 0$ (weil C^{ij} zwei gleiche Zeilen hat). Somit gilt

$$(A\cdot adj(A))_{ij} = \det(C^{ij}) = \begin{cases}\det(A) & \text{falls} \quad i = j, \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j\,.\end{cases}$$

Also erhalten wir, dass $A \cdot adj(A) = \det(A)I_n$. Falls A invertierbar ist, haben wir $\det(A) \neq 0$ und obige Gleichung ist äquivalent zu

$$A\cdot\left(\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right) = I_n.$$

Nach Bemerkung 4.2.5 können wir schließen, dass $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)$. □

Beispiel 4.2.3
Wir beweisen, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen die Inverse.

Zuerst bemerken wir, dass (durch Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0\end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1\end{pmatrix} \\ &= 1 - 2(3) + (-6) = -11 \neq 0\,.\end{aligned}$$

Da $\det(A) \neq 0$ können wir schließen, dass A invertierbar ist. Die Cramersche Regel erlaubt uns, die Inverse zu finden. Wir berechnen die Matrizen $\tilde{A}_{ij}$ und ihre

Determinanten. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{11}) = 1, & \tilde{A}_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{12}) = 3 \\
\tilde{A}_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{13}) = -6, & \tilde{A}_{21} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{21}) = -1 \\
\tilde{A}_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{22}) = -3, & \tilde{A}_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{23}) = -5 \\
\tilde{A}_{31} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{31}) = -4, & \tilde{A}_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{32}) = -1 \\
\tilde{A}_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\tilde{A}_{33}) = 2, & &
\end{aligned}
$$

also

$$
adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.
$$

KAPITEL 5

LINEARE ABBILDUNGEN

5.1 Lineare Abbildungen: Definition und Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen ein, die verträglich mit der Struktur des Vektorraums sind.

Definition 5.1.1
Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $F\colon V \to W$ heißt *linear* (oder ist ein *Homomorphismus*), falls

$$F(v+v') = F(v) + F(v') \quad \text{für alle } \; v, v' \in V, \quad \text{und} \tag{5.1.1}$$

$$F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \text{für alle } \; v \in V \; \text{ und } \; \lambda \in \mathbb{K}\,. \tag{5.1.2}$$

Äquivalent gesagt, eine Abbildung $F\colon V \to W$ ist linear, falls für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ gilt

$$F(\lambda v + \lambda' v') = \lambda F(v) + \lambda' F(v')\,. \tag{5.1.3}$$

Die Äquivalenz ist leicht zu beweisen: Bedingungen (5.1.1) und (5.1.2) implizieren (5.1.3), weil

$$F(\lambda v + \lambda' v') \overset{(5.1.1)}{=} F(\lambda v) + F(\lambda' v') \overset{(5.1.2)}{=} \lambda F(v) + \lambda' F(v')\,.$$

Umgekehrt, (5.1.3) impliziert (5.1.1) (man kann $\lambda = \lambda' = 1$ nehmen), und (5.1.2) (man kann $\lambda' = 0$ nehmen).

Gleichung (5.1.3) kann generalisiert werden: Es seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, dann

$$F\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F(v_i)\,. \tag{5.1.4}$$

Bemerkung 5.1.1

1. Bemerken Sie, dass (5.1.2) impliziert, dass

$$F(\mathbf{0}_V) = F(0 \cdot v) = 0 \cdot F(v) = \mathbf{0}_W \quad \text{und}$$

$$F(-v) = F((-1) \cdot v) = (-1)F(v) = -F(v)\,.$$

2. Es seien $F\colon V \to W$ und $G\colon W \to U$ lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann $G \circ F\colon V \to U$ ist auch linear, weil für alle $v, v' \in V$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ gilt

$$G(F(\lambda v + \lambda' v')) = G(\lambda F(v) + \lambda' F(v')) = \lambda G(F(v)) + \lambda' G(F(v'))\,.$$

Definition 5.1.2
Mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge aller Homomorphismen zwischen V und W. Wir nennen $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ einen

(a) *Monomorphismus*, wenn F injektiv ist;

(b) *Epimorphismus*, wenn F surjektiv ist;

(c) *Isomorphismus*, wenn F bijektiv ist;

(d) *Endomorphismus*, wenn $V = W$;

(e) *Automorphismus*, wenn $V = W$ und φ bijektiv ist.

Die Menge aller Endomorphismen von V (bzw. Automorphismen von V) wird durch $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ (bzw. durch $GL_{\mathbb{K}}(V)$) bezeichnet.

Proposition 5.1.1
Es sei $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein Isomorphismus. Dann ist auch die Umkehrabbildung $F^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Umkehrabbildung F^{-1} ist natürlich bijektiv. Also sollen wir nur beweisen, dass F^{-1} linear ist. Es seien w, w' beliebige Elemente in W, und v, v' Elemente in V, sodass $v = F^{-1}(w)$ und $v' = F^{-1}(w')$. Also erhalten wir, dass $F(v) = F(F^{-1}(w)) = w$ und ähnlich $F(v') = w'$. Deshalb haben wir

$$F^{-1}(w + w') = F^{-1}(F(v) + F(v')) = F^{-1}(F(v + v')) = v + v' = F^{-1}(w) + F^{-1}(w')\,.$$

Analog, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$

$$F^{-1}(\lambda w) = F^{-1}(\lambda F(v)) = F^{-1}(F(\lambda v)) = \lambda v = \lambda F^{-1}(w)\,.$$

□

Beispiel 5.1.1 1. Es sei $N\colon V \to W$ die “Null-Abbildung", d.h. $N(v) = \mathbf{0}_W$ (der Null-Vektor von W), für alle $v \in V$. Dann ist N eine Lineare Abbildung.

2. Die Identität $\mathbf{1}_V\colon V \to V$ ist ein Automorphismus von V. Nach Bemerkung 5.1.1 und Proposition 5.1.1 haben wir, dass $(GL_{\mathbb{K}}(V), \circ)$ eine Gruppe ist (hier bezeichnet $\circ$ die Verknüpfung).

3. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Abbildung $\lambda\mathbf{1}_V\colon V \to V$, definiert als $(\lambda\mathbf{1})(v) = \lambda v$, ist linear. Wir bemerken, dass falls $\lambda = 0$, dann $0\mathbf{1}_V = N$. Falls $\lambda \neq 0$, dann $\lambda\mathbf{1}_V \in GL_{\mathbb{K}}(V)$ (die Inverse ist genau $\lambda^{-1}\mathbf{1}_V$).

4. Es seien U, W Untervektorräume von V, sodass $V = U \oplus W$. Wir haben schon bewiesen (Lemma 3.2.12), dass es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$ gibt. Wir definieren die *Projektionen* $p_U \colon V \to U$ und $p_W \colon V \to W$ als $p_U(v) = p_U(u + w) = u$ und $p_W(v) = p_W(u + w) = w$. Es ist leicht zu beweisen, dass p_U und p_W linear sind. Zum Beispiel, es sei $v' = u' + w'$, wobei $u' \in U$ und $w' \in W$, und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, dann
$$\begin{aligned} p_U(\lambda v + \lambda' v') &= p_U(\lambda u + \lambda w + \lambda' u' + \lambda' w') = p_U(\lambda u + \lambda' u' + \lambda w + \lambda' w') \\ &= \lambda u + \lambda' u' = \lambda p_U(v) + \lambda' p_U(v'). \end{aligned}$$
Ganz analog kann man beweisen, dass p_W linear ist. Außerdem sind p_U und p_W surjektiv, also sind sie Epimorphismen.
5. Es sei U ein Untervektorraum von V und $i \colon U \to V$ die Inklusion. Es ist leicht nachzuprüfen, dass i ein Monomorphismus ist.

Proposition 5.1.2
Es sei $F \colon V \to W$ eine lineare Abbildung, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $w_i := F(v_i)$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Falls $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, dann sind auch $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig. Äquivalent gesagt, falls $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind, dann sind auch $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Es seien $v_1, \dots, v_n$ linear abhängige Vektoren. Also existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich Null, sodass
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$
Nach Bemerkung 5.1.1 und durch Linearität von F haben wir, dass
$$\mathbf{0}_W = F(\mathbf{0}_V) = F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n\,,$$
also sind $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig. □

Fragen und Vertiefungen 5.1.1
In obiger Proposition, es seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren und $w_i := F(v_i)$ für jedes $i = 1, \dots, n$. Kann man schließen, dass $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind?

Vorlesung 19 - 09.01.2017

Satz 5.1.3
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F \colon V \to W$, sodass $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Der obige Satz ist sehr wichtig und sagt uns: um eine lineare Abbildung zu definieren, genügt es, das Bild der Elemente einer Basis von V zu definieren.

Beweis. Es sei $v \in V$, und $k_1, \dots, k_n$ seine Koordinaten bezüglich der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, also $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$. Wir erinnern uns daran, dass mit Lemma 3.2.4 die Skalare $k_1, \dots, k_n$ eindeutig bestimmt sind.

Falls es eine lineare Abbildung F gibt, sodass $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, dann muss

$$F(v) = k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n$$

sein. In der Tat, durch Linearität von F (Gleichung 5.1.4) folgt, dass

$$F(v) = F(k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n) = k_1 F(v_1) + \cdots + k_n F(v_n) = k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n \,.$$

Also ist F eindeutig bestimmt.

Jetzt beweisen wir, dass die Abbildung F, wie oben definiert, linear ist. Es seien $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$ und $v' = k'_1 v_1 + \cdots + k'_n v_n$, wobei $k'_i \in \mathbb{K}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann

$$\begin{aligned} F(v + v') &= F((k_1 + k'_1) v_1 + \cdots + (k_n + k'_n) v_n) = (k_1 + k'_1) w_1 + \cdots + (k_n + k'_n) w_n = \\ &= k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n + k'_1 w_1 + \cdots + k'_n w_n = F(v) + F(v') \,. \end{aligned}$$

Also erfüllt F Eigenschaft (5.1.1). Jetzt prüfen wir (5.1.2). Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= F(\lambda k_1 v_1 + \cdots + \lambda k_n v_n) = \lambda k_1 w_1 + \cdots + \lambda k_n w_n = \\ &= \lambda (k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n) = \lambda F(v) \,. \end{aligned}$$

Wir können schließen, dass F linear ist. □

Definition 5.1.3
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Wir definieren den *Kern* von F, bezeichnet mit $\mathrm{Ker}(F)$, durch

$$\mathrm{Ker}(F) := \{v \in V \mid F(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V \,,$$

und das *Bild* von F, bezeichnet mit $\mathrm{Im}(F)$, durch

$$\mathrm{Im}(F) := F(V) = \{w \in W \mid w = F(v) \text{ für einen } v \in V\} \subseteq W \,.$$

Proposition 5.1.4
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$.

(a) $Ker(F)$ ist ein Untervektorraum von V und $Im(F)$ ist ein Untervektorraum von W;

(b) F ist injektiv genau dann, wenn $Ker(F) = \{\mathbf{0}_V\}$;

(c) *F ist surjektiv genau dann, wenn Im$(F) = W$.*

Beweis. (a) Zuerst bemerken wir, dass $\mathrm{Ker}(F) \neq \emptyset$, weil $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ (sehen Sie Bemerkung 5.1.1). Es seien $v, v' \in \mathrm{Ker}(F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir müssen beweisen, dass $v + v' \in \mathrm{Ker}(F)$ und $\lambda v \in \mathrm{Ker}(F)$. Das ist eine Folgerung aus der Linearität von F; in der Tat

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W \quad \text{und} \quad F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W \, .$$

Um zu beweisen, dass $\mathrm{Im}(F)$ ein Untervektorraum von W ist, bemerken wir zuerst, dass $\mathrm{Im}(F) \neq \emptyset$ (weil $\mathbf{0}_W = F(\mathbf{0}_V) \in \mathrm{Im}(F)$). Es seien $w, w' \in \mathrm{Im}(F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Definition von $\mathrm{Im}(F)$, existieren $v, v' \in V$, sodass $F(v) = w$ und $F(v') = w'$. Wir haben

$$w + w' = F(v) + F(v') = F(v + v') \quad \text{und} \quad \lambda w = \lambda F(v) = F(\lambda v) \, ,$$

also ist $\mathrm{Im}(F)$ ein Untervektorraum von W.

(b) Wir haben schon bemerkt, dass $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Also, wenn F injektiv ist, dann $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$. Umgekehrt, es sei $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$ und $v, v' \in V$ mit $F(v) = F(v')$. Wir müssen beweisen, dass $v = v'$. Bemerken wir, dass $F(v - v') = F(v) - F(v') = \mathbf{0}_W$, also $v - v' \in \mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$ und $v = v'$.

(c) ist klar. □

Bemerkung 5.1.2
Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. Nach Linearität von F folgt, dass

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\} \, .$$

Definition 5.1.4
Es sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann nennen wir die Dimension von $\mathrm{Im}(F)$ den *Rang* der Abbildung F und bezeichnen den Rang von F mit $r(F)$.

Der folgende Satz ist sehr wichtig:

Satz 5.1.5
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Nehmen wir an, dass $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$. *Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{K}}(Ker(F)) + r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \, .$$

Beweis. Da $\mathrm{Ker}(F)$ ein Untervektorraum von V ist, und da $\dim_{\mathbb{K}}(V) =: n < \infty$, Korollar 3.2.11 impliziert, dass $\dim(\mathrm{Ker}(F)) =: s \leq n$. Es sei $\{e_1, \ldots, e_s\}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(F)$. Nach Proposition 3.2.10 existieren Vektoren $v_{s+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $\{e_1, \ldots, e_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist (Basisergänzung). Es genügt zu beweisen, dass $\{F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(F)$ ist, weil diese Behauptung impliziert, dass $r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(F)) = n - s = \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F))$.

Es sei $w \in \mathrm{Im}(F)$, also existiert $v \in V$ sodass $F(v) = w$. Es seien $k_1, \dots, k_s, k_{s+1}, \dots, k_n$ die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$. Wir haben

$$w = F(k_1 e_1 + \cdots + k_s e_s + k_{s+1} v_{s+1} + \cdots + k_n v_n) = k_{s+1} F(v_{s+1}) + \cdots + k_n F(v_n).$$

Also ist $\{F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}(F)$. Wir sollen noch beweisen, dass $F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)$ linear unabhängig sind.

Nehmen wir die Linearkombination

$$\alpha_{s+1} F(v_{s+1}) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = \mathbf{0}_W ,$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{K}$ für alle $i = s+1, \dots, n$. Wir haben

$$F(\alpha_{s+1} v_{s+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = \mathbf{0}_W ,$$

also $\alpha_{s+1} v_{s+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \mathrm{Ker}(F)$. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_{s+1} v_{s+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s ,$$

oder, äquivalent gesagt,

$$\alpha_{s+1} v_{s+1} + \cdots + \alpha_n v_n - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_s e_s = \mathbf{0}_V .$$

Weil die Vektoren $e_1, \dots, e_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, erhalten wir $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und, insbesondere, $\alpha_{s+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Wir können schließen, dass $F(v_{s+1}), \dots, F(v_n)$ linear unabhängig sind.

$\square$

Bemerkung 5.1.3
Bemerken Sie, dass W unendliche Dimensionen haben könnte und auch in diesem Fall erhalten wir $r(F) < \infty$.

Folgendes Korollar gibt uns eine einfache Methode um zu wissen, wann eine lineare Abbildung ein Isomorphismus ist.

Korollar 5.1.6
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) =: n < \infty$, und $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. *$Ker(F) = \{\mathbf{0}_V\}$;*

2. *$Im(F) = W$;*

3. *F ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 5.1.5 haben wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F)) = 0 \iff r(F) = n$. Jetzt bemerken wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F)) = 0 \iff \mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$, und $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(F)) = r(F) = n \iff \mathrm{Im}(F) = W$, und die Äquivalenz zwischen 1. und 2. bewiesen wird. Die Äquivalenz zwischen 1. (oder 2.) und 3. ist leicht zu beweisen. □

Vorlesung 20 - 12.01.2017

Definition 5.1.5
Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W, so heißen die Vektorräume (zueinander) *isomorph.* Wir schreiben $V \simeq W$.

Bemerkung 5.1.4
Die Isomorphie "$\simeq$" zwischen Vektorräumen ist eine Äquivalenzrelation:

(1) $\simeq$ ist *reflexiv*: $V \simeq V$;

(2) $\simeq$ ist *symmetrisch*: Wenn $V \simeq W$, dann $W \simeq V$;

(3) $\simeq$ ist *transitiv*: Wenn $V \simeq W$ und $W \simeq U$, dann $V \simeq U$.

Der Beweis ist eine Übung.

Folgender Satz sagt uns, dass bis auf Isomorphie es nur einen n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum gibt.

Satz 5.1.7
Es seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann gilt $V \simeq W$ genau dann, wenn $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass $V \simeq W$. Sei $F\colon V \to W$ der Isomorphismus zwischen V und W. Weil $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 0$, impliziert Satz 5.1.5, dass $r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Weil F surjektiv ist, dann $r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

Umgekehrt, sei $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) = n$. Es seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W, und F die Abbildung mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (sehen Sie Satz 5.1.3). Weil $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{Im}(F)$, dann $W = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{Im}(F) \subseteq W$, also ist $\mathrm{Im}(F) = W$ und F surjektiv. Nach Satz 5.1.5 erhalten wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F)) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(W) = 0$, und F ist auch injektiv. Wir können schließen, dass F ein Isomorphismus ist. □

5.2 Lineare Abbildungen und dazugehörige Matrizen

Seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Für jeden Homomorphismus $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ definieren wir eine $m \times n$-Matrix, bezeichnet mit $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$, die von $F, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ abhängt. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ definieren wir die Skalare $a_{1i}, \ldots, a_{mi} \in \mathbb{K}$ als die Koordinaten von $F(v_i)$ bezüglich der Basis $\mathbf{w}$, also

$$F(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{mi}w_m\,.$$

Die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$ ist definiert als

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})\,.$$

Wir haben schon bemerkt, dass gegeben eine Basis $\mathbf{v}$ von V, eine Lineare Abbildung $F\colon V \to W$ von den Bilden $F(v_i)$ der Basis $\mathbf{v}$ eindeutig bestimmt ist (sehen Sie Satz 5.1.3). Also genügt die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$, um das Bild $F(v)$ eines beliebigen Vektors in $v \in V$ zu bestimmen. Explizit haben wir

Proposition 5.2.1
Es seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Es sei $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$ die dazugehörige Matrix. Gegeben ein beliebiger Vektor $v \in V$ mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ bezüglich der Basis $\mathbf{v}$, also $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, die Koordinaten $y_1, \ldots, y_m$ von $F(v)$ bezüglich der Basis $\mathbf{w}$, also $F(v) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m$, sind gegeben durch folgende Formel:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beweis. Weil F linear ist, haben wir

$$\begin{aligned} F(v) &= F(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + x_2F(v_2) + \cdots + x_nF(v_n) = \\ &= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \\ &\quad +x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m) + \cdots \\ &\quad \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) = \\ &= \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\Big)w_1 + \Big(\sum_{i=1}^n a_{2i}x_i\Big)w_2 + \cdots + \Big(\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i\Big)w_m\,. \end{aligned}$$

Also erhalten wir genau, dass

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

□

Gegeben zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W, dann hat die Menge aller Homomorphismen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ eine natürliche Struktur eines Vektorraumes. In der Tat sind die Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert: Für jede $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$, ist $F+G$ definiert als

$$(F+G)(v) := F(v) + G(v), \quad \text{für alle } \ v \in V$$

und für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda F)(v) := \lambda F(v), \quad \text{für alle } \ v \in V.$$

Es ist leicht zu beweisen, dass $F+G$ und λF zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ gehören, für jede $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ und dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$, mit obigen Operationen, eine Struktur eines Vektorraumes hat.

Satz 5.2.2
Es seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}\colon Hom_{\mathbb{K}}(V,W) & \to & M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ F & \mapsto & A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere,

$$\dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}(V,W)) = mn. \tag{5.2.1}$$

Beweis. Wir beweisen, dass

(i) $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ ist linear;

(ii) Wir finden eine Abbildung $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}}\colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$, sodass $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)}$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{M_{mn}(\mathbb{K})}$; also ist $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ bijektiv und deshalb ein Isomorphismus. (Bemerken Sie, dass nach Proposition 5.1.1 die Inverse $(A_{\mathbf{w},\mathbf{v}})^{-1} = L_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ auch linear ist.)

Die letzte Behauptung (Gleichung (5.2.1)) ist dann eine Folgerung des Satzes 5.1.7.

(i) Es seien $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $A := A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$ und $B := A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(G)$. Wir sollen beweisen, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F+G) = A + B$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\lambda F) = \lambda A$, für beliebige $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Es seien a_{ji} und b_{ji} die Koeffizienten von A und B, wobei $j = 1, \ldots, m$ und $i = 1, \ldots, n$. Also $F(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{mi}w_m$ und $G(v_i) = b_{1i}w_1 + b_{2i}w_2 + \cdots + b_{mi}w_m$, für $i = 1, \ldots, n$. Dann $(F+G)(v_i) = F(v_i) + G(v_i) = (a_{1i} + b_{1i})w_1 + \cdots + (a_{mi} + b_{mi})w_m$, und wir erhalten

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F+G) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = A + B\,.$$

Ähnlich kann man beweisen, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\lambda F) = \lambda A$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) Es sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_m$, betrachtet als Zeilenvektoren in $\mathbb{K}^n = M_{1n}(\mathbb{K})$. Definieren wir $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(A) =: F_A$ als die Abbildung

$$F_A(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = (Z_1\mathbf{x})w_1 + \cdots + (Z_m\mathbf{x})w_m\,,$$

wobei $\mathbf{x}$ der Spaltenvektor $(x_1 \ldots x_n)^T$ ist. Nach Proposition 5.2.1 haben wir, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F_A) = A$ oder, äquivalent gesagt, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{M_{mn}(\mathbb{K})}$. Ähnlich haben wir, dass $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) = F$ oder, äquivalent gesagt, dass $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)}$. $\square$

Vorlesung 21 - 16.01.2017

Bemerkung 5.2.1
Im Beweis des Satzes 5.2.2 haben wir bewiesen, dass gegeben endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W bzw. mit Basen $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$, und gegeben eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, es genau eine lineare Abbildung $F_A \colon V \to W$ gibt, sodass die dazugehörige Matrix (bezüglich der Basen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$) genau A ist. Wir nennen F_A die *lineare Abbildung assoziiert zur Matrix A*. Per definitionem haben wir, dass

$$F_A(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m\,,$$

wobei $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = (y_1 \ldots y_m)^T$ und $\mathbf{x} = (x_1 \ldots x_n)^T$.

Beispiel 5.2.1
Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ bzw. mit kanonischen Basen $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ (also

$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$) und $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ (also $f_1 = (1,0)$ und $f_2 = (0,1)$). Definieren wir die lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass

$$F(e_1) = (2,5) = 2f_1 + 5f_2, \quad F(e_2) = (1,-1) = f_1 - f_2, \quad \text{und} \quad F(e_3) = (0,4) = 4f_2.$$

(Bemerken Sie, dass $F(e_1)$, $F(e_2)$ und $F(e_3)$ das Bild $F(v)$, für alle $v \in \mathbb{R}^3$, definieren! Sehen Sie Satz 5.1.3.) Also erhalten wir

$$A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten bemerken, dass die Matrix $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F)$ von den Basen von V und W abhängt! Zum Beispiel, es sei $\mathbf{f}' = \{f_1', f_2'\}$, wobei $f_1' = (2,5)$ und $f_2' = (1,-1)$. Wir sollen zuerst beweisen, dass $\mathbf{f}'$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Da $\mathbb{R}^2$ Dimension 2 hat, genügt es zu beweisen, dass f_1' und f_2' linear unabhängig sind. Es sei

$$\alpha(2,5) + \beta(1,-1) = (0,0)$$

eine Null-Linearkombination. Das System

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 5\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

hat nur die triviale Lösung $(\alpha, \beta) = (0,0)$, weil die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist (Sehen Sie Bemerkung 2.2.2 und Satz 4.2.5, und bemerken Sie, dass $\det(B) = -7 \neq 0$). Also sind f_1' und f_2' linear unabhängig.

Weil $(0,4) = \frac{4}{7}(2,5) - \frac{8}{7}(1,-1) = \frac{4}{7}f_1' - \frac{8}{7}f_2'$, erhalten wir

$$A_{\mathbf{f}',\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ & & \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \end{pmatrix} \neq A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F).$$

Proposition 5.2.3
Es seien U, V, W drei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume bzw. mit Basen $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_s\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Es seien $G\colon U \to V$ und $F\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, und $F \circ G\colon U \to W$ ihre Verknüpfung. Dann erfüllen die dazugehörigen Matrizen $A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G) \in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{u}}(F \circ G) \in M_{m,s}(\mathbb{K})$ die Gleichung

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{u}}(F \circ G) = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G).$$

Beweis. Es sei $u = z_1 u_1 + \cdots + z_s u_s$ ein beliebiger Vektor in U. Dann $G(u) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, wobei $\mathbf{x} := (x_1 \ldots x_n)^T = A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G)(z_1 \ldots z_s)^T = A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G)\mathbf{z}$. Wir haben auch $(F \circ G)(u) = F(G(u)) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$, wobei

$$\mathbf{y} := (y_1 \ldots y_m)^T = A_{\mathbf{w},\mathbf{u}}(F \circ G)\mathbf{z}.$$

Also
$$\mathbf{y} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)\mathbf{x} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G)\mathbf{z}\,,$$
und die Behauptung folgt, weil u ein beliebiger Vektor in U ist. □

Es sei $V = W$, also $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir haben folgendes

Korollar 5.2.4
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbf{v} = \{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Dann

1. *$F = \mathbf{1}_V$ genau dann, wenn $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = I_n$;*
2. *F ist invertierbar (also $F \in GL_{\mathbb{K}}(V)$) genau dann, wenn $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ invertierbar ist (also $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) \in GL_n(\mathbb{K})$). Falls $F \in GL_{\mathbb{K}}(V)$, dann*
$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F^{-1}) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F))^{-1}\,.$$

Beweis. 1. Falls $F = \mathbf{1}_V$, dann natürlich $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = I_n$. In der anderen Richtung genügt es zu bemerken, dass falls $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = I_n$, also falls $F(v_i) = v_i$ für alle $i = 1,\dots,n$, dann $F(v) = v$ für alle $v \in V$.

2. Nehmen wir an, dass $F \in GL_{\mathbb{K}}(V)$. Mit der Hilfe von 1. und Proposition 5.2.3 haben wir, dass
$$I_n = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F \circ F^{-1}) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F^{-1})\,.$$
Also $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) \in GL_n(\mathbb{K})$ und $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F^{-1}) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F))^{-1}$ (Sehen Sie Bemerkung 4.2.5!).

Umgekehrt nehmen wir an, dass $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) \in GL_{\mathbb{K}}(V)$. Es sei $B \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)B = I_n$. Es sei $F_B \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ die dazugehörige lineare Abbildung, also $F_B = L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B)$ und $B = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B))$ (Sehen Sie den Beweis des Satzes 5.2.2). Nach Proposition 5.2.3 erhalten wir, dass
$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F \circ L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B)) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B)) = I_n\,,$$
und nach 1. haben wir, dass $F \circ L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B) = \mathbf{1}_V$, also ist F surjektiv. Nach Korollar 5.1.6 können wir schließen, dass F bijektiv ist. □

Fragen und Vertiefungen 5.2.1
Im Abschnitt 2.2.2 haben wir eine Verbindung zwischen (linearen) Abbildungen und Matrizen schon gesehen. Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ mit der kanonischen Basis Δ eingeführt in Beispiel 3.2.6. Gegeben $A \in M_n(\mathbb{R})$, es sei $\mathcal{L}_A\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$. Ist $\mathcal{L}_A$ linear? Was ist $A_{\Delta,\Delta}(\mathcal{L}_A)$? Können Sie Korollar 5.2.4 benutzen, um zu beweisen, dass $\mathcal{L}_A$ invertierbar ist, genau dann, wenn A invertierbar ist? (Sehen Sie auch Proposition 2.2.2.)

Definition 5.2.1
Es seien $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zwei Basen des endlichdimensionalen Vektorraums V. Die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ heißt die *Basiswechselmatrix* von $\mathbf{v}$ nach $\mathbf{w}$.

Also, per definitionem, sind die Einträge der j-ten Spalte die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, für jedes $j = 1, \ldots, n$, wobei $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Bemerken wir, dass gegeben $v \in V$, haben wir

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = \mathbf{1}_V(v) = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n\,,$$

und nach Proposition 5.2.1 erhalten wir

$$\mathbf{y} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)\mathbf{x}\,,$$

wobei $\mathbf{y} = (y_1 \ldots y_n)^T$ und $\mathbf{x} = (x_1 \ldots x_n)^T$. Also erlaubt uns die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathbf{w}$ von den Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathbf{v}$ zu erhalten.

Außerdem impliziert Proposition 5.2.3 und Korollar 5.2.4, dass

$$I_n = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) = A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)\,.$$

Die obige Gleichung beweist folgendes:

Lemma 5.2.5
Gegeben zwei Basen $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *eines endlichdimensionalen Vektorraums* V*, dann ist die Basiswechselmatrix* $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ *von* $\mathbf{v}$ *nach* $\mathbf{w}$ *invertierbar und*

$$(A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V))^{-1} = A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)\,.$$

Vorlesung 22 - 19.01.2017

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ Skalare definiert durch

$$\begin{aligned} v_1 = {} & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\ \vdots\; & \qquad\qquad \vdots \\ v_n = {} & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n, \end{aligned}$$

und $A \in M_n(\mathbb{K})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Formell können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

Falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist, ist die Matrix A genau $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$. Außerdem ist A in diesem Fall invertierbar (Lemma 5.2.5). Umgekehrt haben wir, dass

Lemma 5.2.6
Es sei A eine invertierbare Matrix und $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren definiert durch (5.2.2). *Dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.*

Beweis. Weil A invertierbar ist, ist A^T auch invertierbar, und formell können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (A^T)^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{5.2.3}$$

Also $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ und deshalb $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ (Sehen Sie Fragen und Vertiefungen 3.2.2). Weil $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V ist, folgt es, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$. Jetzt genügt es zu bemerken, dass ein Erzeugendensystem mit $n = \dim(V)$ Elementen eine Basis ist. (Wenn nicht, dann könnten wir eine Untermenge $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ finden, mit $k < n$, und Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, sodass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} = V$ und $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ linear unabhängig sind. In diesem Fall hätten wir einen Widerspruch, weil $\dim(V) = k < n$ wäre. Vergleichen Sie mit dem Beweis des Satzes 3.2.5.) □

Eine wichtige Auswirkung des Lemmas 5.2.5 und 5.2.6 ist folgendes:

Korollar 5.2.7
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbf{v}$ *eine Basis von V und $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen von V. Es sei $\underline{v} = (v_1 \ldots v_n)^T$ der "Spaltenvektor" der Elemente der Basis* $\mathbf{v}$. *Dann*

$$\mathcal{B} = \{M\underline{v} \mid M \in GL_n(\mathbb{K})\}.$$

Beweis. Mit Lemma 5.2.5 können wir die Inklusion "$\subseteq$" beweisen: Gegeben eine Basis $\mathbf{w}$, dann ist die Matrix M genau $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)^T$. Lemma 5.2.6 beweist die andere Inklusion "$\supseteq$". □

Fragen und Vertiefungen 5.2.2
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n > 0$. Was ist die Kardinalität von $\mathcal{B}$?

Lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$

Es seien $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ mit kanonischen Basen $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Jede Matrix $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiert die lineare Abbildung

$$F_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} \tag{5.2.4}$$

wobei wir die Vektoren in $\mathbb{K}^n$ (bzw. in $\mathbb{K}^m$) mit der Menge der Spaltenvektoren $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (bzw. $M_{m,1}(\mathbb{K})$) identifiziert haben.

Es ist leicht zu beweisen, dass $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B) = B$. Dies ist eine Folgerung aus der folgenden Tatsache:

$$F_B(e_i) = B\, e_i = S_i, \tag{5.2.5}$$

wobei S_i die i-te Spalte von B ist. Bemerken Sie, dass falls $\mathbf{e}$ und $\mathbf{f}$ keine kanonischen Basen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ sind, dann $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B) \neq B$!

Nach (5.2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} r(F_B) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(F_B)) &= \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{F_B(e_1), \ldots, F_B(e_n)\}) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, \ldots, S_n\}) = r(B) = r(A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B)). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Koordinaten des Vektors $B\mathbf{x}$ homogene Polynome ersten Grades in $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Umgekehrt, gegeben m homogene Polynome ersten Grades $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)$, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ &F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

Beispiel 5.2.2
Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),$$

dann ist die lineare Abbildung $F_B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert wie oben, gegeben durch

$$F_B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2 - x_3)\,.$$

Wir bemerken noch einmal, dass $B = A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B)$, wobei $\mathbf{e} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ und $\mathbf{f} = \{(1,0), (0,1)\}$ die kanonischen Basen bzw. von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sind.

Umgekehrt, sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung definiert als

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 6x_2 - x_3, x_2, x_2 - x_3)\,.$$

Dann ist F linear und $F = F_B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Der Satz von Kronecker-Rouché-Capelli

In Aufgabe 4.4 haben Sie schon den Satz von Kronecker-Rouché-Capelli bewiesen. Wir erinnern uns daran, dass der Satz uns sagt, dass gegeben eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ein Spaltenvektor $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_m)^T$ und Unbekannte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, das lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5.2.6}$$

eine Lösung hat genau dann, wenn $r(A) = r(A|\mathbf{b})$, wobei $(A|\mathbf{b})$ die augmentierte Matrix ist, also

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall sagt uns der Satz, dass das System (5.2.6) $\infty^{n-r(A)}$ Lösungen hat.

Jetzt können wir einen zweiten Beweis dieses Satzes geben.

Es sei $F_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung definiert in (5.2.4). Wir bemerken, dass das System (5.2.6) eine Lösung hat genau dann, wenn $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(F_A)$. Wir haben schon bemerkt, dass $\mathrm{Im}(F_A) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{F_B(e_1), \dots, F_B(e_n)\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, \dots, S_n\}$. Also können wir schließen, dass

$$\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(F_A) \iff r(A) = r(A|\mathbf{b}).$$

(Warum ist die obige Äquivalenz wahr?) Wir möchten jetzt beweisen, dass falls $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(F_A)$, das System (5.2.6) $\infty^{n-r(A)}$ Lösungen hat.

Wir erinnern uns daran, dass ein lineares Gleichungssystem ∞^s Lösungen hat genau dann, wenn die Menge der Lösungen von s unabhängigen Parametern abhängt (Sehen Sie Abschnitt 1.3.1, insbesondere (1.3.5)).

(i) Zuerst bemerken wir, dass nach Proposition 1.3.2, ein lineares Gleichungssystem (das Lösungen besitzt) ∞^s Lösungen hat genau dann, wenn das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.2.7}$$

∞^s Lösungen hat. In diesem Fall ist die Menge der Lösungen von (5.2.7) der Gestalt

$$\Sigma_0 := \{(P_1(t_1, \dots, t_s), \dots, P_n(t_1, \dots, t_s)),\ \ t_1, \dots, t_s \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^n,$$

wobei $P_1, \dots, P_n$ homogene Polynome ersten Grades sind.

Vorlesung 23 - 23.01.2017

(ii) Wir bemerken, dass diese Menge ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ ist: Σ_0 ist genau der Kern von F_A! Außerdem ist $\dim(\Sigma_0) = s$. In der Tat seien

$$\begin{aligned} P_1(t_1, \ldots, t_s) &= \alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2 + \cdots + \alpha_{1s}t_s \\ &\vdots \\ P_n(t_1, \ldots, t_s) &= \alpha_{n1}t_1 + \alpha_{n2}t_2 + \cdots + \alpha_{ns}t_s\,, \end{aligned}$$

für $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Dann

$$\Sigma_0 = \{t_1(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{n1}) + t_2(\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n2}) + \cdots + t_s(\alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{ns}),\ \ t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{K}\},$$

also

$$\Sigma_0 = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\alpha_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{n1}), \ldots, \alpha_s = (\alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{ns})\}\,.$$

Die Unabhängigkeit dieser Vektoren ist eine Folgerung aus der Tatsache, dass $t_1, \ldots, t_s$ unabhängige Parameter sind (Prüfen Sie nach!). Also $\dim(\Sigma_0) = s$.

(iii) Nach Satz 5.1.5 können wir schließen, dass

$$s = \dim(\Sigma_0) = \dim(\operatorname{Ker}(F_A)) = n - r(F_A) = n - r(A)\,.$$

Übung. Es sei V ein Vektorraum und $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Basis von V. Es seien $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ zwei Teilmengen von V, wobei die Koordinaten von v_1 bezüglich der Basis $\mathbf{e}$ sind $(1, 1, 0)$. Wir schreiben $v_1 = \mathbf{e}(1, 1, 0)$. Dann $v_2 = \mathbf{e}(2, 1, 1)$, $v_3 = \mathbf{e}(0, -2, 1)$, $w_1 = \mathbf{e}(-1, 0, 1)$, $w_2 = \mathbf{e}(1, -2, -3)$ und $w_3 = \mathbf{e}(1, 1, 1)$. Beweisen Sie, dass $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Basen von V sind, und berechnen Sie $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ und $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)$.

KAPITEL 6

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum von Dimension n, und $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. In diesem Kapitel betrachten wir Endomorphismen von V. Es sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir bezeichnen die Matrix $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ nur mit $A_{\mathbf{v}}(F)$. Satz 5.2.2 gibt uns einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\begin{array}{rcl} A_{\mathbf{v}}\colon \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ F & \mapsto & A_{\mathbf{v}}(F). \end{array} \tag{6.0.1}$$

Also, wenn die Basis $\mathbf{v}$ fest ist, können wir Endomorphismen von V mit den dazugehörigen Matrizen identifizieren. Wir bemerken noch einmal, dass

$$A_{\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) = I_n$$

und F ein Automorphismus ist genau dann, wenn $A_{\mathbf{v}}(F)$ invertierbar ist:

$$F \in GL_{\mathbb{K}}(V) \iff A_{\mathbf{v}}(F) \in GL_n(\mathbb{K}),$$

(sehen Sie Korollar 5.2.4) und wir erhalten eine Bijektion

$$A_{\mathbf{v}}\colon GL_{\mathbb{K}}(V) \to GL_n(\mathbb{K})$$

(Bemerken Sie, dass in obigem Fall, $A_{\mathbf{v}}$ kein Isomorphismus ist! In der Tat haben $GL_{\mathbb{K}}(V)$ und $GL_n(\mathbb{K})$ keine Struktur von Vektorräumen.)

Die Determinante eines Endomorphismus

In diesem Abschnitt wollen wir die Determinante $\det(F)$ eines Endomorphismus F von V definieren. Die Idee ist, den Isomorphismus (6.0.1) zu benutzen. Aber wir sollen zuerst beweisen, dass $\det(A_{\mathbf{v}}(F))$ unabhängig von der Basis $\mathbf{v}$ ist. Wir schreiben $F\colon V \to V$ als

$$V \xrightarrow{\mathbf{1}_V} V \xrightarrow{F} V \xrightarrow{\mathbf{1}_V} V,$$

wobei die gewählten Basen bzw. $\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sind. Nach Proposition 5.2.3 und Korollar 5.2.4 erhalten wir, dass

$$A_{\mathbf{w}}(F) = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)A_{\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V))^{-1}A_{\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V). \tag{6.0.2}$$

Nach dem Satz 4.2.5 folgt, dass $\det\Big((A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V))^{-1}\Big) = \det\Big(A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)\Big)^{-1}$, also und (6.0.2) impliziert, dass

$$\det\Big(A_{\mathbf{w}}(F)\Big) = \det\Big(A_{\mathbf{v}}(F)\Big). \tag{6.0.3}$$

Gleichung (6.0.2) beweist, dass $\det\Big(A_{\mathbf{v}}(F)\Big)$ von der Basis $\mathbf{v}$ ist, und wir bezeichnen sie mit $\det(F)$.

Definition 6.0.1
Es sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Endomorphismus von V. Dann nennen wir $\det(F) \in \mathbb{K}$ die *Determinante des Endomorphismus F*.

Ähnliche Matrizen

Definition 6.0.2
Wir sagen, dass zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *ähnlich* (oder *konjugiert*) sind, falls es eine invertierbare Matrix $M \in GL_n(\mathbb{K})$ gibt, sodass

$$B = M^{-1}AM\,.$$

Wir schreiben $A \sim B$

Bemerkung 6.0.1 (i) Gegeben $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und Basen $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ von V, impliziert (6.0.2), dass die Matrizen $A_{\mathbf{v}}(F)$ und $A_{\mathbf{w}}(F)$ ähnlich sind.

(ii) Wir bemerken, dass $\det(A) = \det(B)$ wenn $A \sim B$.

Lemma 6.0.1
$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $M_n(\mathbb{K})$.

Beweis. (Reflexivität) $A \sim A$, weil $A = I_n^{-1}AI_n$.

(Symmetrie) Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A \sim B$, also existiert $M \in GL_n(\mathbb{K})$ sodass $B = M^{-1}AM$. Diese Gleichung ist äquivalent zu $MB = MM^{-1}AM = AM$, und zu $MBM^{-1} = AMM^{-1} = A$, also $A = MBM^{-1} = (M^{-1})^{-1}BM^{-1}$, und $B \sim A$.

(Transitivität) Es seien $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$, sodass $A \sim B$ und $B \sim C$. Dann existieren $M_1, M_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ sodass $B = M_1^{-1}AM_1$ und $C = M_2^{-1}BM_2$, also $C = M_2^{-1}M_1^{-1}AM_1M_2 = (M_1M_2)^{-1}A(M_1M_2)$, und $A \sim C$. □

Vorlesung 24 - 26.01.2017

Proposition 6.0.2
Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann sind A und B genau dann ähnlich, wenn es einen Endomorphismus $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$ und Basen $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_n\}$ von V gibt, mit $A = A_{\mathbf{v}}(F)$ und $B = A_{\mathbf{w}}(F)$.

Beweis. Wir haben schon bemerkt, dass die Matrizen $A_{\mathbf{v}}(F)$, $A_{\mathbf{w}}(F)$ bezüglich verschiedener Basen $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ eines Endomorphismus F ähnlich sind. (Bemerkung 6.0.1 (i).)

Umgekehrt, seien A und B ähnliche Matrizen. Es sei $\mathbf{v}$ eine Basis von V, und $F := L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(A)$; dann $A = A_{\mathbf{v}}(F)$ (Sehen Sie den Beweis des Satzes 5.2.2). Wir wollen eine Basis $\mathbf{w}$ von V finden, sodass $B = A_{\mathbf{w}}(F)$. Um $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_n\}$ zu finden, benutzen wir Gleichung (6.0.2). Es sei $M \in GL_n(\mathbb{K})$, sodass $B = M^{-1}AM$.

A-posteriori muss $M = A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)$ gelten. Deshalb sei w_i der Vektor in V, dessen Koordinaten bezüglich der Basis v genau die Elemente der i-ten Spalte von M sind, also $w_i = m_{1i}v_1 + \cdots + m_{ni}v_n$, für jedes $i = 1, \ldots, n$. Da M invertierbar ist, impliziert Korollar 5.2.7, dass $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V ist. Außerdem ist per definitionem von $\mathbf{w}$ die Matrix M genau $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)$, und nach Gleichung (6.0.2) haben wir

$$A_{\mathbf{w}}(F) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V))^{-1} A_{\mathbf{v}}(F) A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) = M^{-1}AM = B\,.$$

□

6.1 Diagonalisierbare Endomorphismen und diagonalisierbare Matrizen

Definition 6.1.1 (a) Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix $D \in M_n(\mathbb{K})$, bei der alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonale Null sind. Äquivalent gesagt, wenn $D = (d_{ij})$, dann ist D eine Diagonalmatrix genau dann, wenn $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$, also

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})\,.$$

(b) Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathbf{v}$ von V gibt, sodass $A_{\mathbf{v}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist, also

$$A_{\mathbf{v}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\,.$$

(c) Eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *diagonalisierbar*, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, also wenn es eine Matrix $M \in GL_n(\mathbb{K})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, sodass

$$M^{-1}AM = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,.$$

Bemerkung 6.1.1
Proposition 6.0.2 impliziert, dass $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ diagonalisierbar ist genau dann, wenn $A_{\mathbf{v}}(F)$ diagonalisierbar ist.

Insbesondere, sei $V = \mathbb{K}^n$ und $B \in M_n(\mathbb{K})$. Dann ist B diagonalisierbar genau dann, wenn die Abbildung F_B definiert in (5.2.4) diagonalisierbar ist.

Es sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann

$$F(v_i) = \lambda_i v_i \quad \text{für alle } \; i = 1, \dots, n \tag{6.1.1}$$

genau dann, wenn $A_{\mathbf{v}}(F) = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

In diesem Abschnitt werden wir verstehen, wann ein Endomorphismus (oder eine Matrix) diagonalisierbar ist.

Beispiel 6.1.1
In Aufgabe 5.4 haben Sie bewiesen, dass falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$ jeder Endomorphismus $F \colon V \to V$ der Gestalt $F = \lambda \mathbf{1}_V$ ist (wobei $\lambda \in \mathbb{K}$). Also, jeder Endomorphismus eines eindimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums ist diagonalisierbar. (In diesem Fall ist $A_{\mathbf{v}}(F)$ diagonal, für jede Basis $\mathbf{v}$!).

Falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) > 1$, kann man Endomorphismen finden, die nicht diagonalisierbar sind. Um diagonalisierbare Endomorphismen zu charakterisieren brauchen wir mehr Theorie.

Definition 6.1.2

- Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Eigenvektor*, falls $v \neq \mathbf{0}$ und gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass

  $$F(v) = \lambda v\,.$$

  Der Skalar λ heißt *Eigenwert* von F, und wir sagen, dass v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

  Die Menge der Eigenwerte von F wird *Spektrum* genannt und $\sigma(F)$ geschrieben, also

  $$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}, F(v) = \lambda v\}\,.$$

- Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ein *Eigenvektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ von A ist ein Eigenvektor der linearen Abbildung $F_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert in (5.2.4). Ähnlich, ein *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{K}$ von A ist ein Eigenwert von F_A. Falls $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ ist, dann haben wir

  $$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\,,$$

  wobei $\mathbf{x}$ als Spaltenvektor betrachtet wird.

Beispiel 6.1.2
Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und F der Endomorphismus $\lambda \mathbf{1}_V$, wobei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist jeder Vektor $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Es sei $F \colon V \to V$ ein Endomorphismus, der nicht injektiv ist. Dann ist jeder Vektor in $\mathrm{Ker}(F) \setminus \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Bemerkung 6.1.2
Die Voraussetzung $v \neq \mathbf{0}$ in der Definition eines Eigenvektors von F ist wichtig, weil sie die *Eindeutigkeit* des Eigenwerts des Eigenvektors v impliziert. In der Tat, sei $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Eigenvektor zum $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\mu \in \mathbb{K}$, dann $F(v) = \lambda v = \mu v$, also $(\lambda - \mu)v = \mathbf{0}$. Weil $v \neq \mathbf{0}$, erhalten wir $\lambda = \mu$. (Falls $v = \mathbf{0}$, dann $(\lambda - \mu)\mathbf{0} = \mathbf{0}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.)

Der Eigenraum zu einem Eigenwert

Es sei $\lambda \in \sigma(F)$ ein Eigenwert von F. Wir definieren

$$V_\lambda(F) = \{v \in V \mid v \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq V\,.$$

Wir nennen $V_\lambda(F)$ den *Eigenraum von F zum Eigenwert λ*. Die nächste Proposition sagt uns, dass $V_\lambda(F)$ eine wichtige Struktur hat.

Proposition 6.1.1
$V_\lambda(F)$ ist ein Unterverktorraum von V.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $V_\lambda(F) \neq \emptyset$, weil $\mathbf{0} \in V_\lambda(F)$. Wir sollen beweisen, dass gegeben beliebige Skalare $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ und Vektoren $v_1, v_2 \in V_\lambda(F)$, dann $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_\lambda(F)$. Falls $k_1v_1 + k_2v_2 = \mathbf{0}$, dann nach der Definition von $V_\lambda(F)$ können wir schließen, dass $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_\lambda(F)$. Falls nicht, dann sollen wir beweisen, dass $F(k_1v_1 + k_2v_2) = \lambda(k_1v_1 + k_2v_2)$. Wir haben

$$F(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1F(v_1) + k_2F(v_2) = k_1\lambda v_1 + k_2\lambda v_2 = \lambda(k_1v_1 + k_2v_2),$$

und die Behauptung folgt. □

Gegeben $A \in M_n(\mathbb{K})$, dann nennen wir $V_\lambda(A)$ den *Eigenraum von A zum Eigenwert λ*, wobei $V_\lambda(A) := V_\lambda(F_A)$.

Proposition 6.1.2
Es sei $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$ Eigenvektoren von F zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Falls $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$, dann sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

Also sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Proposition mit Induktion nach k. Falls $k = 1$, dann ist v_1 linear unabhängig, weil $v_1 \neq \mathbf{0}$ (Aufgabe 3.9 a)). Jetzt nehmen wir an, dass $k \geq 2$. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ Skalare und

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_kv_k = \mathbf{0}\,. \tag{6.1.2}$$

Also

$$\mathbf{0} = F(\mathbf{0}) = F(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_kv_k) = \lambda_1\alpha_1v_1 + \lambda_2\alpha_2v_2 \cdots + \lambda_k\alpha_kv_k. \tag{6.1.3}$$

Andererseits, wenn wir (6.1.2) durch λ_1 multiplizieren, erhalten wir

$$\lambda_1\alpha_1 v_1 + \lambda_1\alpha_2 v_2 \cdots + \lambda_1\alpha_k v_k = \mathbf{0}. \tag{6.1.4}$$

Wenn man die Gleichung (6.1.4) von (6.1.3) subtrahiert, dann haben wir

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = \mathbf{0}\,.$$

Nach Induktion sind die Eigenvektoren $v_2, \ldots, v_k$ linear unahängig, also muss $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$ gelten, für alle $i = 2, \ldots, k$. Weil $\lambda_i \neq \lambda_1$ für alle $i \geq 2$, folgt es, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i = 2, \ldots, k$. Nach (6.1.2) haben wir, dass $\alpha_1 = 0$, weil $v_1 \neq \mathbf{0}$. Also müssen alle Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ Null sein, und die Behauptung folgt. □

Vorlesung 25 - 30.01.2017

Proposition 6.1.3
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Nehmen wir an, dass jeder $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Eigenvektor von F ist. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $F = \lambda \mathbf{1}_V$.

Beweis. Falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$, dann haben wir schon bemerkt, dass ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $F = \lambda\mathbf{1}_V$ (Aufgabe 5.4). Also können wir annehmen, dass $\dim_{\mathbb{K}}(V) \geq 2$. Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Nach Voraussetzung existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (nicht unbedingt unterschiedlich), sodass $F(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zuerst wollen wir beweisen, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Seien $1 \leq i \neq j \leq n$ und $v_{ij} := e_i + e_j$. Nach Voraussetzung existiert $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$, sodass

$$F(v_{ij}) = \lambda_{ij} v_{ij} = \lambda_{ij}(e_i + e_j).$$

Andererseits, durch Linearität von F, erhalten wir

$$F(v_{ij}) = F(e_i + e_j) = F(e_i) + F(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j.$$

Mit Hilfe der obigen Gleichungen haben wir $(\lambda_{ij} - \lambda_i)e_i + (\lambda_{ij} - \lambda_j)e_j = \mathbf{0}$. Weil e_i, e_j linear unabhängig sind, erhalten wir $\lambda_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$. Weil i und j beliebig sind, haben wir, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$; nennen wir diesen Skalar λ. Weil $F(e_i) = \lambda e_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und weil $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V ist, haben wir, dass $F(v) = \lambda v$ für alle $v \in V$, also $F = \lambda\mathbf{1}_V$. □

6.1.1 Das charakteristische Polynom

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Methode, um Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus F zu finden. Ein wichtiges Konzept ist gegeben durch das charakteristische Polynom. Um die Definition dieses Polynoms zu rechtfertigen, brauchen wir folgende:

Proposition 6.1.4
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von F genau dann, wenn der Endomorphismus

$$F - \lambda \mathbf{1}_V : V \to V$$

definiert als $(F - \lambda \mathbf{1}_V)(v) = F(v) - \lambda(v)$ für alle $v \in V$, nicht injektiv ist.

Bemerkung 6.1.3
Nach Korollar 5.1.6, ist $G := F - \lambda \mathbf{1}_V$ nicht injektiv genau dann, wenn $G \notin GL_{\mathbb{K}}(V)$ (also, wenn G kein Automorphismus ist). Nach Korollar 5.2.4, $G \notin GL_{\mathbb{K}}(V)$ genau dann, wenn $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(G) \notin GL_n(\mathbb{K})$, wobei $\mathbf{v}$ eine beliebige Basis von V ist. Ferner, nach Satz 4.2.5, gilt $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(G) \notin GL_n(\mathbb{K})$ genau dann, wenn $\det(A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(G)) = \det(G) = 0$. Also können wir Proposition 6.1.4 neu fassen:

$$\boxed{\textit{Ein Skalar } \lambda \in \mathbb{K} \textit{ ist ein Eigenwert von } F \textit{ genau dann, wenn } \det(F - \lambda \mathbf{1}_V) = 0.}$$

Beweis. Der Endomorphismus $F - \lambda \mathbf{1}_V$ ist nicht injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Ker}(F - \lambda \mathbf{1}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$, also genau dann, wenn ein Vektor $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ existiert, sodass $(F - \lambda \mathbf{1}_V)(v) = \mathbf{0}$. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$F(v) = \lambda v$$

und $v \in \operatorname{Ker}(F - \lambda \mathbf{1}_V) \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist ein Eigenvektor von F. □

Um die Proposition 6.1.4 zu benutzen, müssen wir eine Basis $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ wählen, um $\det(A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F - \lambda \mathbf{1}_V))$ explizit zu berechnen. Es sei

$$A := A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Da $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F - \lambda \mathbf{1}_V) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) - A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\lambda \mathbf{1}_V)$, und

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\lambda \mathbf{1}_V) = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda),$$

haben wir, dass

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F-\lambda \mathbf{1}_V) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Diese Berechnung begründet folgende:

Definition 6.1.3
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten $a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$, und x eine Unbekannte. Die Determinante der Matrix

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

ist ein Polynom $P_A(x) \in \mathbb{K}[x]$ und heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.

Wir wollen das charakteristische Polynom eines Endomorphismus F definieren. Die Idee ist die Matrix $A := A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ zu benutzen um $P_F(x)$ als $P_A(x)$ zu definieren. Aber diese Matrix hängt von der Basis $\mathbf{v}$ ab. Wir erinnern uns daran, dass zwei Matrizen $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{w}}(F)$ bezüglich verschiedener Basen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ von V ähnlich sind (Sehen Sie Bemerkung 6.0.1). Dann, um $P_F(x)$ zu definieren, brauchen wir nur das folgende:

Lemma 6.1.5
Gegeben zwei ähnliche Matrizen A und B, gilt

$$P_A(x) = P_B(x)\,.$$

Beweis. Es sei $M \in GL_n(\mathbb{K})$, sodass $B = M^{-1}AM$. Dann

$$B - xI_n = M^{-1}AM - xI_n = M^{-1}AM - xM^{-1}I_nM = M^{-1}(A-xI_n)M\,.$$

Nach Satz 4.2.5 erhalten wir, dass $\det(B-xI_n) = \det(A-xI_n)$, und die Behauptung folgt. □

Definition 6.1.4
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Das *charakteristische Polynom* von F, bezeichnet mit $P_F(x) \in \mathbb{K}[x]$, ist das charakteristische Polynom der Matrix $A = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$, wobei $\mathbf{v}$ eine beliebige Basis von V ist.

Noch einmal, nach Lemma 6.1.5 ist dieses Polynom unabhängig von der Basis $\mathbf{v}$.

Bemerkung 6.1.4
Das charakteristische Polynom $P_F(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades. Der Koeffizient von x^n ist $(-1)^n$ (Übung).

Die folgende wichtige Behauptung wird in der Vorlesung *Algebra* bewiesen:

Satz 6.1.6
Ein Polynom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ n-ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$, d. h. es gibt höchstens n verschiedene Skalare $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, k \leq n$, sodass $P(x_i) = 0$.

Mit obigem Satz können wir folgendes Korollar beweisen:

Korollar 6.1.7
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von F genau dann, wenn λ eine Nullstelle von $P_F(x)$ ist. Insbesondere besitzt F höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Beweis. Die erste Behauptung ist eine Folgerung der Proposition 6.1.4 (und der äquivalenten Bemerkung 6.1.3) und der Definition von $P_F(x)$. Die zweite eine Folgerung des Satzes 6.1.6. □

Dieses Korollar gibt uns eine Methode, um die Eigenwerte von $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zu finden: wir müssen die Nullstellen von $P_F(x)$ berechnen.

Bemerkung 6.1.5
Gegeben ein Körper $\mathbb{K}$, dann kann ein Polynom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ *keine* Nullstellen besitzen. Zum Beispiel, sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $P(x) = x^2 + 1$. Dann besitzt P keine reellen Nullstellen. Aber, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*, dass jedes nicht konstante Polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Zum Beispiel, hat das Polynom $P(x)$, betrachtet als Polynom in $\mathbb{C}[x]$, die Nullstellen $\pm\mathrm{i}$.

Beispiel 6.1.3

1. Das charakteristische Polynom der Einheitsmatrix I_n ist gegeben durch
$$P_{I_n}(x) = (1 - x)^n \,.$$
Also ist $1 \in \mathbb{K}$ der einzige Eigenwert der Matrix I_n (wie wir schon wissen!).

2. Das charakteristische Polynom der Nullmatrix $O \in M_n(\mathbb{K})$ ist gegeben durch
$$P_O(x) = (-1)^n x^n \,.$$
Also ist $0 \in \mathbb{K}$ der einzige Eigenwert der Matrix O (wie wir schon wissen!!).

3. Das charakteristische Polynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
ist gegeben durch $P_A(x) = x^2 + 1$. Dieses Polynom besitzt keine Nullstelle falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Also hat die Matrix A keine Eigenwerte (und keine Eigenvektoren), wenn betrachtet als reelle Matrix. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dann hat A Eigenwerte $\pm \mathrm{i}$.

Vorlesung 26 - 02.02.2017

4. Wir erinnern uns daran, dass eine *obere Dreiecksmatrix* $A^+ = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ die Gleichungen $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ erfüllt, also ist A^+ der Gestalt
$$A^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
und alle Einträge von A^+ unterhalb der Hauptdiagonale sind Null. In Aufgabe 4.7 haben Sie bewiesen, dass $\det(A^+) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Da xI_n eine obere Dreiecksmatrix ist, und da die Differenz zwischen zwei oberen Dreiecksmatrizen noch eine obere Dreiecksmatrix ist, erhalten wir, dass $A^+ - xI_n$ eine obere Dreiecksmatrix ist und
$$P_{A^+}(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\cdots(a_{nn} - x)\,.$$
Es sei $A^- = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ eine *untere Dreiecksmatrix*, also $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$, und A^- ist der Gestalt
$$A^- = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Dann erhalten wir, dass
$$P_{A^-}(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\cdots(a_{nn} - x)\,.$$
(Warum?) Wir können schließen, dass die Eigenwerte einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix genau die Einträge der Hauptdiagonale $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sind.

Die folgende Proposition ist eine Folgerung von (6.1.1):

Proposition 6.1.8
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Dann ist F diagonalisierbar genau dann, wenn V eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ besitzt, sodass $F(v_i) = \lambda_i v_i$.

Folgender Satz ist sehr wichtig, und gibt uns eine Methode um zu verstehen, wann $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, oder wann $A \in M_n(\mathbb{K})$, diagonalisierbar ist.

Satz 6.1.9
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Es sei $\sigma(F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ das Spektrum von F. Dann gilt die folgende Ungleichung:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}(F)) + \cdots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_k}(F)) \leq n\,, \tag{6.1.5}$$

und die Gleichung gilt genau dann, wenn F diagonalisierbar ist.

Gegeben $\lambda \in \sigma(F)$, dann heißt die Dimension $d(\lambda)$ von $V_\lambda(F)$ die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Beweis. Es sei $d(i) := d(\lambda_i)$ die Dimension von $V_{\lambda_i}(F)$ und $\{v_{i1}, \dots, v_{id(i)}\}$ eine Basis von $V_{\lambda_i}(F)$, für alle $i = 1, \dots, k$. Nach Satz 3.2.7, um (6.1.5) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Vektoren

$$v_{11}, \dots, v_{1d(1)}, v_{21}, \dots, v_{2d(2)}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kd(k)} \tag{6.1.6}$$

linear unabhängig sind. Es sei

$$\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{1d(1)}v_{1d(1)} + \alpha_{21}v_{21} + \cdots + \alpha_{2d(2)}v_{2d(2)} + \cdots + \alpha_{k1}v_{k1} + \cdots + \alpha_{kd(k)}v_{kd(k)} = \mathbf{0} \tag{6.1.7}$$

eine Null-lineare Kombination, wobei $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ für alle i, j. Wir definieren v_i als $\alpha_{i1}v_{i1} + \cdots + \alpha_{id(i)}v_{id(i)} \in V_{\lambda_i}(F)$, für alle $i = 1, \dots, k$. Wir können (6.1.7) als

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k = \mathbf{0} \tag{6.1.8}$$

schreiben. Wir bemerken, dass $v_i = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\alpha_{i1} = \ldots = \alpha_{id(i)} = 0$, für alle $i = 1, \dots, k$. Also, um zu beweisen, dass die Vektoren in (6.1.6) linear unabhängig sind, genügt es zu beweisen, dass $v_1 = v_2 = \ldots = v_k = \mathbf{0}$. Falls die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ nicht alle Null wären, dann nach (6.1.8) hätte die Menge $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ mindestens zwei Elemente. Nennen wir diese Elemente $v_{h_1}, \dots, v_{h_l}$, für ein $l \leq k$. In diesem Fall, nach (6.1.8) würden wir erhalten, dass $v_{h_1} + \cdots + v_{h_l} = \mathbf{0}$. Also wären $v_{h_1}, \dots, v_{h_l}$ linear abhängig. Aber liegen die v_{h_i} in verschiedenen Eigenräumen, und nach Proposition 6.1.2 ist dies ein Widerspruch.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, bemerken wir, dass falls $d(1) + \cdots + d(k) = n$, sind die Vektoren in (6.1.6) eine Basis $\mathbf{v}$ von V, und $A_{\mathbf{v}}(F)$ ist eine Diagonalmatrix. Also ist F diagonalisierbar. Umgekehrt, falls F diagonalisierbar ist, dann kann man beweisen, dass die Gleichung $d(1) + \cdots + d(k) = n$ gelten muss. $\square$

Als Folgerung haben wir:

Korollar 6.1.10
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Falls F n verschiedene Eigenwerte besitzt, dann ist F diagonalisierbar.

Beweis. Weil $\dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda(F)) \geq 1$ für alle $\lambda \in \sigma(F)$, wenn $|\sigma(F)| = n$ erhalten wir

$$\sum_{\lambda \in \sigma(F)} \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda(F)) \geq n\,.$$

Nach (6.1.5) haben wir, dass die Gleichung gelten muss, und Satz 6.1.9 impliziert, dass F diagonalisierbar ist. □

Fragen und Vertiefungen 6.1.1
Korollar 6.1.10 sagt uns, dass falls $|\sigma(F)| = n$, dann ist F diagonalisierbar. Können wir sagen, dass falls F diagonalisierbar ist, dann $|\sigma(F)| = n$?

Beispiel 6.1.4
In Beispiel 6.1.3, 4. haben wir schon bemerkt, dass das charakteristische Polynom einer oberen Dreiecksmatrix A^+ das Polynom $P_{A^+}(x) = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$ ist. Also sind die Eigenwerte von A^+ genau $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. Nach Korollar 6.1.10 folgt es, dass falls $a_{ii} \neq a_{jj}$ für alle $i \neq j$, dann ist A^+ diagonalisierbar.

Falls $a_{ii} = a_{jj}$ für $i \neq j$, dann kann A^+ nicht diagonalisierbar sein. Zum Beispiel, es sei

$$A^+ := \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei nicht alle $*$ Null sind. Dann ist A^+ nicht diagonalisierbar. In der Tat, weil $a_{ii} = 0$ für alle i, ist der einzige Eigenwert gleich Null. Falls A^+ diagonalisierbar wäre, dann wäre sie ähnlich zu der Nullmatrix O. Aber, falls $B \sim O$, dann ist $B = O$, weil $B = M^{-1}OM = O$ für alle $M \in GL_n(\mathbb{K})$! Weil $A^+ \neq O$, erhalten wir einen Widerspruch.

Eine Methode um die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu finden

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir möchten die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von F finden. Es sei $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

1. Dann sind die Eigenwerte von F genau die Eigenwerte von $A_{\mathbf{v}}(F) =: A$, also, die Nullstellen von $P_A(x)$.

2. Die Eigenvektoren von F sind per definitionem die Vektoren $v \neq \mathbf{0}$, sodass $F(v) = \lambda v$. Falls $(x_1, \ldots, x_n)$ die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathbf{v}$ sind, dann für jeden Eigenwert λ, ist die Gleichung $F(v) = \lambda v$ äquivalent zu

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.9}$$

   (Sehen Sie Proposition 5.2.1) Also können wir schließen, dass die Koordinaten (bezüglich der Basis $\mathbf{v}$) der Eigenvektoren zum Eigenwert λ genau die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems (6.1.9) sind.

3. Wir bemerken, dass (6.1.9) nicht nur die triviale Lösung besitzt! In der Tat, sagt der Satz von Kronecker-Rouché-Capelli, dass (6.1.9) $\infty^{n-r(A-\lambda I_n)}$-Lösungen besitzt. Weil $A - \lambda I_n$ *nicht invertierbar* ist ($\det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda) = 0$), dann ist $r(A - \lambda I_n) < n$.

   Es sei $\Sigma_0(\lambda)$ die Menge der Lösungen des Systems (6.1.9). Wir haben schon bemerkt, dass $\dim(\Sigma_0(\lambda)) = n - r(A - \lambda I_n)$ (Sehen Sie Vorlesung 23). Außerdem, können wir $\Sigma_0(\lambda)$ mit $V_\lambda(F)$ identifizieren durch $\Sigma_0 \ni (x_1, \ldots, x_n) \to x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V_\lambda(F)$, und dann

$$d(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda(F)) = \dim_{\mathbb{K}}(\Sigma_0(\lambda)) = n - r(A - \lambda I_n). \tag{6.1.10}$$

   Für jedes $\lambda \in \sigma(F)$ finden wir eine Basis $\{v_{\lambda 1}, \ldots, v_{\lambda d(\lambda)}\}$ des Eigenraums $V_\lambda(F)$.

4. Falls

$$\sum_{\lambda \in \sigma(F)} d(\lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma(F)} (n - r(A - \lambda I_n)) = n,$$

   impliziert Satz 6.1.9, dass F diagonalisierbar ist und die Basis $\mathbf{v}'$, sodass die Matrix $A_{\mathbf{v}'}(F)$ diagonal ist, ist gegeben durch

$$\bigcup_{\lambda \in \sigma(F)} \{v_{\lambda 1}, \ldots, v_{\lambda d(\lambda)}\}.$$

   (Sehen Sie den Beweis des Satzes 6.1.9.)

Vorlesung 27 - 06.02.2017

Übung. Es sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie das charakteristische Polynom $P_A(x)$, die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Bemerkung 6.1.6
Spezielle Eigenwerte

- ($\lambda = \mathbf{0}$) Gegeben eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, falls $0 \in \sigma(A)$, dann sind die Eigenvektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ (wir betrachten $\mathbf{x}$ als Spaltenvektor) zum Eigenwert $\lambda = 0$ genau die Vektoren im Kern von A, also die Vektoren die

  $$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.1.11}$$

  erfüllen.

  Weil $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_0(A)$, dann hat das System nicht nur die triviale Lösung.

  Übung Beweisen Sie, dass $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar ist genau dann, wenn $0 \notin \sigma(A)$.

- ($\lambda = \mathbf{1}$) Gegeben eine nicht-leere Menge X und eine Abbildung $f\colon X \to X$, ein *Fixpunkt* von f ist ein $x \in X$, sodass $f(x) = x$.

  Falls X ein Vektorraum V ist, und $f = F$ ein Endomorphismus von V, dann ist $v \in V$ ein Fixpunkt von F genau dann, wenn $F(v) = v$ oder, äquivalent gesagt, wenn v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Wir bemerken, dass falls der Körper $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente besitzt, und falls $1 \in \sigma(F)$, dann besitzt die Menge der Fixpunkte unendlich viele Elemente.

Beispiel 6.1.5
Achsenspiegelungen in $\mathbb{R}^2$ Es sei l eine Ursprungsgerade, d.h. eine Gerade, die durch den Ursprung $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ verläuft. Es sei $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Achsenspiegelung durch l. Diese Abbildung ist linear. Dann sind die Fixpunkte von S genau die Vektoren in l (wir identifizieren die Punkte in l mit den Vektoren in $\mathbb{R}^2$ von $\mathbf{0}$ nach einem Punkt in l). Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von S mit Eigenraum gegeben durch l. Es sei l' die Ursprungsgerade, die senkrecht auf l ist. Dann $S(v) = -v$ für alle $v \in l'$. Also ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert von S mit Eigenraum l'. Weil $\dim_{\mathbb{R}}(l) = \dim_{\mathbb{R}}(l') = 1$, dann ist S diagonalisierbar.

VORLESUNGEN