Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
11.11.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 4

Diese Übungen müssen bis spätestens Mittwoch 18.11.14 18 Uhr, in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (20 Punkte)

Die Krümmungsmittelpunkte $M(t_0)$ ist das Zentrum des Kreises der am besten die Kurve im Punkt $u(t_0)$ approximiert. Die Menge der Krümmungmittelpunkte einer Kurve u nennt man die Evolute von u. In der Vorlesung ist die folgende Formel gegeben

$$M(t_0) = u(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} J\left(\frac{\dot{u}(t_0)}{\|\dot{u}(t_0)\|}\right), \qquad \text{mit} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

für die Krümmungsmittelpunkte.

a) Geben Sie eine Parameterisierung der Evolute der Parabel $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$.

b) Zeigen Sie : Die Evolute der Parabel P ist

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}x^2\right\}.$$

Aufgabe 2. (30 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Fermats Spirale F ist gegeben durch

$$F = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \rho^2 = a\theta, \qquad \text{mit} \qquad \rho, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

a) Skizzieren Sie Fermats Spirale.

b) Geben Sie zwei reguläre parametrisierte Kurven $\alpha, \beta : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$, sodass

$$F \setminus \{0\} = \alpha(\mathbb{R}_{>0}) \cup \beta(\mathbb{R}_{>0}).$$

c) Berechnen Sie die Krümmungen κ_α und κ_β der Kurven α und β.

d) Zeigen Sie, dass die Krümmungen $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$ Maxima haben und berechnen Sie wo diese Maxima erreicht sind.

e) Geben Sie eine reguläre glatte Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Spirale Fermats und zeigen Sie, dass sie diese Eigenschaften hat.