Prof. Silvia Sabatini *Universität zu Köln*
Dr. Alexander Caviedes Castro *14.12.2020*

ANALYSIS I
Übungsblatt 7

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 21.12.2020, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Mit der Hilfe der gegebenen Definitionen beweisen Sie, dass für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten:

1. $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$;
2. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$;
3. $\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \overset{\circ}{\setminus} A)$, wobei diese Vereinigung eine Vereinigung zwischen disjunkten Mengen ist;
4. $A \subseteq \overset{\circ}{A} \cup \partial A$;
5. $A \cup \partial A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$, wobei die letzte Vereinigung eine Vereinigung zwischen disjunkten Mengen ist.

Präsenzaufgabe 2. Zeigen Sie, dass die *Kosinusfunktion* , die *Tangensfunktion* und die *Kotangensfunktion* stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereich sind.

Hausaufgabe 1. (6= 2 + 4 Punkte) Es seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 ein Häufungspunkt von D und $l \in \mathbb{R}$.

- Nehmen Sie an, dass es zu jeder offenen Umgebung V von l eine offene Umgebung U von x_0 gibt, so dass
$$f\big((U \setminus \{x_0\}) \cap D\big) \subseteq V$$
gilt. Kann man daraus schließen, dass
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,?$$
Rechtfertigen Sie Ihre Antwort.

- Nehmen Sie nun an, dass es zu jeder offenen Umgebung U von x_0 eine offene Umgebung V von l gibt, so dass
$$f\big((U\backslash\{x_0\}) \cap D\big) \subseteq V$$
gilt. Kann man daraus schließen, dass
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,?$$
Rechtfertigen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 2. (10 = 3 + 7 (1 + 1 + 3 + 1 + 1) Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass, für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{A}$ die größte offene Menge ist, die ganz enhalten in A ist, d. h. dass falls U eine offene Menge ist, für die $U \subseteq A$, dann ist $U \subseteq \overset{\circ}{A}$.

(b) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden:

1. $A \cup \partial A$ ist immer abgeschlossen, wird **Abschluss** von A genannt und mit $\overline{A}$ bezeichnet, also
$$\overline{A} := A \cup \partial A. \tag{1}$$
2. $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$;
3. Der Abschluss von A ist die kleinste abgeschlossene Menge die A enthält, d. h. dass falls B eine abgeschlossene Menge ist, für die $B \supseteq A$, dann gilt $B \supseteq \overline{A}$.
4. A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$.
5. $\overline{A} = A \cup HP(A)$.

Hausaufgabe 3. (9 = 3 + 4 + 2 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Sätze:

(a) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ (bzw. $f\colon D \to \mathbb{C}$) eine Funktion, und $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, wenn entweder

- x_0 ein Häufungspunkt von D ist, und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, oder
- x_0 kein Häufungspunkt von D ist.

(b) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ (bzw. $f\colon D \to \mathbb{C}$) eine Funktion, und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann sind die folgenden äquivalent:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$;

(ii) Für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \to x_0$ und $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$.

(c) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen (bzw. $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $g\colon D \to \mathbb{C}$) und x_0 ein Häufungspunkt von D.

Dann, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$, wir haben

(i) $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + l'$;

(ii) $\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot l$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$);

(iii) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$;

(iv) Falls $l' \neq 0$, es gibt eine Umgebung U von x_0 mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, und gilt $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.

Extra Hausaufgabe 1. (20 Punkte! – wo "!" ein Ausrufzeichen und keine Fakultät ist...)
Es sei X eine nicht leere Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge.
Es sei $\mathcal{I}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{I}(X) = X$;

(ii) $\mathcal{I}(A) \subseteq A$, für alle $A \in \mathcal{P}(X)$;

(iii) $\mathcal{I}(A \cap B) = \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B)$.

Beweisen Sie, dass

1. (2 Punkte) Für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subseteq B$, $\quad \mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{I}(B)$ gilt;

2. (2 Punkte) Für eine beliebige Familie $\{A_i \mid A_i \in \mathcal{P}(X), i \in I\}$ ist
$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{I}(A_i) \subseteq \mathcal{I}(\bigcup_{i\in I} A_i)\,.$$

Es sei $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = \mathcal{I}(A)\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine "Topologie" ist, d.h. beweisen Sie, dass

3. (1 Punkte) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

4. (3 Punkte) Gegeben eine beliebige Familie von Mengen $\{A_i \in \mathcal{T}, i \in I\}$, ist
$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}\,;$$

5. (1 Punkte) Gegeben eine endliche Familie von Mengen $\{A_j \in \mathcal{T}, j \in J\}$, wobei $|J| = n$ für eine $n \in \mathbb{N}$, ist
$$\bigcap_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$$

Es sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{I}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $\mathcal{I}(A) = \overset{\circ}{A}$. Dann ist $\mathcal{T}$ die euklidische Topologie in $\mathbb{R}^n$.

6. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass diese Abbildung $\mathcal{I}$ die oben definierten Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt.

7. (8 Punkte = 2+2+2+2) Es sei $\mathcal{A}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert als $\mathcal{A} = \overline{A}$, der Abschluss von A (siehe Hausaufgabe 2 (b)). Sind die folgenden wahr oder falsch? (Wie immer, wenn "wahr", beweisen Sie die Behauptung; wenn "falsch", finden Sie ein Gegenbeispiel)
   (a) $\mathcal{I} \circ \mathcal{A}(A) = A$ für alle offenen Mengen $A \in \mathcal{T}$;
   (b) $\mathcal{A} \circ \mathcal{I}(A) = A$ für alle abgeschlossenen Mengen A;
   (c) $\mathcal{A} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$ als Abbildungen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$;
   (d) $\mathcal{I} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{I} = \mathcal{I}$ als Abbildungen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.