Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
22.11.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 7

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 29.11.17 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Wichtig: Für die (6 LP)-Klausur ist der Stoff aus der Vorlesung bis einschließlich 20.12.17 relevant. Für die Zulassung zur (6 LP)-Klausur zählen die Übungsblätter bis einschließlich Blatt 10.

Aufgabe 1. (30 Punkte)

Die stereografische Projektion.

Seien $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ die Sphäre und $N = (0,0,1)$ der Nordpol.

(a) Sei $L_{(x,y)}$ die Gerade durch $(x,y,0)$ und N. Zeigen Sie, dass $L_{(x,y)} \cap (S^2 \setminus N)$ genau einen Punkt enthält.

Wir bezeichnen diesen Punkt mit $F(x,y)$. Teil (a) zeigt, dass F eine wohldefinierte Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Formel für F an.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{N\}$. Zeigen Sie, dass $F(\mathbb{R}^2) = S^2 \cap V = S^2 \setminus \{N\}$ und dass $F : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ eine Bijektion ist.

(d) Geben Sie eine Formel für $F^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ an, und zeigen Sie, dass F ein Homöomorphismus ist.

(e) Zeigen Sie, dass $D_{(x,y)}F$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ Rang 2 hat.

(f) Argumentieren Sie, dass dasselbe für $S^2 \setminus \{S\}$ gilt, wobei $S = (0,0,-1)$ der Südpol ist, und dass S^2 eine reguläre Fläche ist.

Bonusaufgabe: Beschreiben Sie eine Karte der gesamten Welt ohne Düsseldorf.

Aufgabe 2. (20 Punkte)

Sei $G : (-\pi, \pi) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$G(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie für (x, y, z) im Bild von G die Koordinaten θ und φ.

b) Bestimmen Sie das Bild von G.

c) Zeigen Sie, dass $D_{(\theta,\varphi)}G$ Rang 2 hat.