Vorlesung 23

Vom letzten Mal ... I: offenes Intervall

Satz von Taylor: $f: I \to \mathbb{R}$ n-Mal diff. in I

$x_0 \in I \implies$

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)} \text{ für } x \to x_0$$

wobei

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Satz (Lagrange-Restglied)

$f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-Mal diff. in I

$x_0, x \in I$

$\implies \exists\, c$ zwischen x_0 und x, sodass

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}$$

Beispiele:

1) $f(x) = e^x$

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}$$, und

$$e^x = T_n(x) + o(x^n) \quad , \quad x \to 0$$

2) $f(x) = \sin(x)$

$$\boxed{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

$$f(x) = T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+2}) \quad , \quad x \to 0$$

3) $f(x) = \cos(x)$, $\cos x = T_{2n}(x) + o(x^{2n+1})$

$$\boxed{T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

[Bmk: falls $f(x) = o((x-x_0)^m) \Rightarrow$
$f(x) = o((x-x_0)^n) \;\; \forall \;\; n \le m$]

4) $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \log(1+x), \quad f \in C^{\infty}((-1,+\infty), \mathbb{R})$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

... (durch Induktion) :

$\forall k \geq 1$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$$

$$\hookrightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

$$f^{(0)}(0) = f(0) = \log(1) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0}$$

Übung

$(\ast)$ (Prop. : $\tau_{n-1}\left[\frac{d}{dx}\ldots\right] = \frac{d}{dx}\,\tau_n[\ldots]$)

- $$\tau_n\left[\frac{1}{1+x}\right] = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k}\qquad (x_0=0)$$

- Finden Sie eine Formel für

$$\underbrace{\tau_n\left[\frac{1}{(1+x)^h}\right],}\ \forall h\in\mathbb{N}\qquad (x_0=0)$$

Proposition 8.3.7
Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die n-Mal differenzierbar in (a,b) ist. Dann ist das n-te Taylorpolynom von f bei x_0 das einzige Polynom $T(x)$, das höchstens Grad n hat, das die folgende Gleichheit erfüllt:

$$f(x) = T(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{für } x \to x_0\,. \tag{8.3.17}$$

(Verallgemeinerung Lemma 8.3.1)

Übung 8.3.4
Prüfen Sie nach, dass das Landau-Symbol "o" für $x \to 0$ die folgenden Eigenschaften erfüllt: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$

1. $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
2. $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ für alle $m > n$;
3. $a \cdot o(x^n) = o(a \cdot x^n) = o(x^n)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
4. $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$;
5. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$
6. $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$;
7. $o(o(x^n)) = o(x^n)$;
8. $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$.

1. $f(x) = o(x^n)$ $\quad g(x) = o(x^n)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$$

2. Bmk: Falls $g = o(x^m) \Rightarrow g = o(x^n)$ $\forall n \leq m$

Prop. 8.3.7 und Übung 8.3.4 $\Rightarrow$ erlauben uns das Taylorpolynom einer Verknüpfung zu finden

n-Mal

Proposition 8.3.8
Es seien I und J zwei offene Intervalle und $g\colon I \to \mathbb{R}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ zwei n-differenzierbare Funktionen, sodass $g(I) \subseteq J$. Es sei $\mathcal{T}_n[f](y)$ das Taylorpolynom von f bei $y_0 \in J$ und $\mathcal{T}_n[g](x)$ das Taylorpolynom von g bei x_0, wobei $y_0 = g(x_0)$. Dann ist das n-te Taylor- *Polynom von $f \circ g$ bei x_0 gegeben durch*

$$\mathcal{T}_n[f \circ g](x) = \Big[\mathcal{T}_n[f](\mathcal{T}_n[g](x))\Big]_n$$

wobei, gegeben ein Polynom P, $[P]_n$ die Summe der Polynomglieder bis zum Grad n bezeichnet.

Beweis: Übung (Benutzen Sie Prop. 8.3.7 und Übung 8.3.4)

Beispiele / Übungen

1. $f(x) = (\sin x)^2$

Beweisen
$$(\sin x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5), \quad x \to 0$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\hookrightarrow \sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

$g(x) = \sin x$, $\quad h(y) = y^2 \rightsquigarrow$ ~~Thm~~ Prop 8.3.8. $\quad T_n[f] =$

$$= \left[T_n[h]\left(T_n[g]\right) \right]_n$$

$$\rightsquigarrow (\sin x)^2 = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right]^2$$

$$\rightsquigarrow (\sin x)^2 = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]^2 =$$

$$= x^2 + \frac{x^6}{36} + \left(o(x^4)\right)^2 - \frac{1}{3}x^4 + 2x\cdot o(x^4) +$$

$$- \frac{1}{3}x^3 \cdot o(x^4) \quad , \text{ für } \underline{\underline{x \to 0}}$$

Zu zeigen: $\overbrace{\left(o(x^4)\right)^2} + \overbrace{2x\cdot o(x^4)} - \frac{1}{3}x^3\cdot o(x^4)$

$$+ \frac{x^6}{36} = o(x^5)$$

* $\left(o(x^4)\right)^2 = \underline{o(x^8)} \Leftarrow$ [Übung 8.3.4, 6. $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$]

* $2x \cdot o(x^4) = \underline{o(x^5)}$ $\left[\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{2x\cdot o(x^4)}{x^5}}_{= \; 2\cdot\frac{o(x^4)}{x^4} \to 0} = 0\right]$

* $-\frac{1}{3}x^3 \cdot o(x^4) = \underline{o(x^7)}$

* $\frac{x^6}{36} = o(x^5)$

[Minimum der Exponente $= \mathbf{5}$

$o(x^m) \Rightarrow o(x^n) \; \forall n \le m$

$$\rightsquigarrow \quad o(x^8) + o(x^7) + o(x^5) + o(x^5) = o(x^5)$$

2. Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2), \quad x \to 0$$

$$g(x) = e^x, \quad f(y) = \frac{1}{1+y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^x} = f(\underbrace{g(x)}_{y})$$

$x_0 = 0$ $\quad g(0) = 1 \rightsquigarrow$ Brauchen das Taylor-Polynom von f bei $y_0 = 1$,

$$\rightsquigarrow \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2), \quad y \to 0$$

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{2+(y-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y-1}{2}\right)}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{1+z}, \quad z = \frac{y-1}{2}$$

$$\rightsquigarrow f(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y-1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \underbrace{\left(\frac{y-1}{2}\right)} + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \underbrace{o\left(\frac{y-1}{2}\right)^2}_{y \to 1}\right]$$

Prop. 8.3.8

<u>Bsp</u>: $y = g(x) = e^x = \underbrace{\overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}^{y-1}} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{1+e^x} = (f \circ g)(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2}\right)^2 + \underbrace{o(x^2)}\right] \underset{x \to 0}{}$$

$$\text{ns} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{4} \cancel{- \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8}} + o(x^2)}_{}$$

$$\xrightarrow{x \to 0}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \underbrace{x^3 + o(x^2)}_{= o(x^2)}$$

8.3.1. Taylorpolynome und Grenzwerte

Korollar 8.3.9
Es sei I ein offenes Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei n-Mal differenzierbare Funktionen. Es sei $x_0 \in I$ und nehmen wir an, dass

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für alle } k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{8.3.20}$$

und dass $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ gilt. Dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Beweis

$\mathcal{T}_n[f](x)$ bei x_0 $\quad\mathcal{T}_n[g](x)$

Weil wir angenommen haben, dass $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \leq n-1$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathcal{T}_n[f](x) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ \mathcal{T}_n[g](x) &= \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

Satz von Taylor:

$$\underline{\underline{x \to x_0}}$$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{o\left((x-x_0)^n\right)}$$

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0}} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{\cancel{n!}} + \frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} \to 0}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{\cancel{n!}} + \frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} \to 0} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

$\blacksquare$

* Berechnung von Grenzwerten mit Taylorpolynomen

$$\left(\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \right)$$

$$x^2 \quad - \quad x^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - (\sin(x^2))}{x^4} \qquad x^{(n)}$$

Wir haben schon berechnet

$$(\sin x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$$

$$\rightsquigarrow (\sin x)^2 - \sin(x^2) = -\frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(\lim_{x \to 0} \frac{o(x^5)}{x^4} = 0 \; \dots \right)$$

8.3.2 : Ein Blick auf die Taylorreihen

Bmk :

- $\exp(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$

- $\underbrace{\exp(x)} = e^x$ (Übung)

- $\underset{\text{bei } x=0}{\tau_n[e^x]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

In diesem Fall ...

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n[e^x] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Definition 8.3.4
Es sei I ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist. Die **Taylorreihe** von f um x_0 ist die Reihe

$$\mathcal{T}[f](x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

<u>Bmk</u> Für $x = x_0$ ist die Taylorreihe genau $f(x_0)$

Frage: Gegeben $f \in C^\infty(I;\mathbb{R})$, ist

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x), \quad \forall x \in I \ ?$$

<u>Nein</u>

Beispiel 1 : Übungsblatt 10, HA 2.2

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Bew/Übung

$f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\tau[f](x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \tau[f](x) = f(x) \quad \text{nur in } x = x_0 = 0$$

Beispiel 2 : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\tau_n\left[\frac{1}{1+x}\right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \xrightarrow[\text{8.7.8.}]{\text{Prop}}$$

$$\tau_n\left[\frac{1}{1-x}\right] = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^k(-x)^k}_{(-1)^k(-1)^k \cdot x^k} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{T}\left[\frac{1}{1-x}\right]_{x_0=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} x^k}} = \frac{1}{1-x} \quad , \text{ falls } |x|<1$$

$$\mathcal{T}\left[\frac{1}{1-x}\right]_{(x_0=0)} = \frac{1}{1-x} \quad , \underline{\forall x : |x|<1}$$

... im Allgemeinen?

Gegeben $f: I \to \mathbb{R}$, I offenes Intervall
$x_0 \in I$

<u>Frage</u>: Wann ist $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = f(x)}$?

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left[\underline{f(x)} - T_n(x) \right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{R_n(x)} = 0$$

* Quantitative Formulierung des Restgliedes (Lagrange)

$$\underbrace{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}, \text{ für ein } c \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x$$

* Nehmen wir an, dass $\exists\, \mathcal{U}$ von x_0, sodass

$$\circledast \begin{cases} (1) \quad \left[\, |f^{(n+1)}(c)| \leq \underbrace{C_{n+1}}_{\text{Konstant}} \in \mathbb{R}, \ \forall c \in \mathcal{U} \right. \\ \text{und sodass} \\ (2) \quad \left[\, \frac{C_{n+1} \cdot |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \right. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \ \forall x \in \mathcal{U}$$

↳ Beweis:

$$0 \leq \underline{|R_n(x)|} = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq$$

$$\overset{(1)}{\leq} \underbrace{\frac{C_{n+1} \cdot |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}}_{} \xrightarrow[n\to+\infty]{(2)} 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

$\Rightarrow \underline{R_n(x) \longrightarrow 0}$ (weil $|R_n(x)| \longrightarrow 0$)

(Einschnürungssatz)

Unter welchen Bedingungen gelten (1) & (2)?

Zum Beispiel:

$$\underbrace{\left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq \alpha \cdot \underline{C^{n+1}}}, \quad \text{für } \alpha > 0,\ C > 0$$

$\Leftrightarrow$ (1) & (2) ??

(1) ✓

(2) $$\frac{c_{n+1} \cdot |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\alpha \cdot C^{n+1} \cdot |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \alpha \underbrace{\frac{\left(C \cdot |x-x_0|\right)^{n+1}}{(n+1)!}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Lemma 8.3.10
Es sei I ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist. Es seien $x_0 \in I$ und U eine Umgebung von x_0, sodass $\alpha, C \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren, mit

$$|f^{(n)}(x)| \leq \alpha\, C^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in U\,.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{für alle } x \in U\,.$$

$\square$