Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
20.12.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 11

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 10.1.18 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei S eine kompakte orientierte reguläre Fläche und $p \in S$ ein hyperbolischer Punkt. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $q \in S$ gibt, sodass die Gauss Krümmung in q verschwindet.

Aufgabe 2. (12 Punkte)

Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$. Zeigen Sie:

(a) Ist $K(p) > 0$, so liegt eine Umgebung von p in S ganz auf einer Seite der affinen Tangentialebene $T_pS + p$.

(b) Ist $K(p) < 0$, so trifft jede Umgebung von p in S beide Seiten der affinen Tangentialebene.

(c) Was kann man im Fall $K(p) = 0$ aussagen?

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierbare reguläre Fläche.

(a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung $N\colon S \to S^2$ (wobei N ein Einheitsnormalenfeld ist) surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $K \geq 0$, falls die Gauß-Abbildung auch injektiv ist.

(c) Verbessern Sie (a) und zeigen Sie, dass die Einschränkung der Gauß-Abbildung auf $S_+ := \{x \in S \,|\, K(x) \geq 0\}$ surjektiv ist.

<u>Aufgabe</u> 4. (16 Punkte)

Betrachten Sie das parametrische Flächenstück

$$x(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, r), r \in \mathbb{R}_+, \phi \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Komponenten der Matrix der ersten Fundamentalform. Sei $\alpha(t)$ die Kurve in diesem Flächenstück, die im Parameterbereich gegeben ist durch $r(t) = e^{t \cot(\theta)/2}$ und $\phi(t) = t/\sqrt{2}$, mit $t \in [0, 2\pi]$ und einer Konstanten θ. Berechnen Sie die Länge dieser Kurve und zeigen Sie, dass θ der Winkel zwischen der Kurve $\alpha(t)$ und den Kurven $\phi =$ konstant auf dem Flächenstück ist.