Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
9.6.2016

Topologie: Übungsblatt 8

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Mittwoch 16.6.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Erinnern Sie sich, dass $\sim$ *Homotopieäquivalenz mit festen Endpunkten bedeutet. Sei* $\gamma\colon I \to X$ *ein stetiger Weg, dann ist* $\tilde{\gamma}$ *der Weg definiert durch* $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $\psi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Seien $\alpha, \beta\colon I \to X$ stetige Wege. Zeigen Sie, dass

$$\alpha \sim \beta \qquad \Longrightarrow \qquad \psi \circ \alpha \sim \psi \circ \beta.$$

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Seien X ein topologischer Raum und $E\colon I \times I \to X$ eine stetige Abbildung. Wir definieren Wege $f, g, h, k\colon I \to X$ durch

$$f(t) := E(0,t), \quad g(t) := E(1,t), \quad h(s) := E(s,0), \quad \text{und} \quad k(s) := E(1,s).$$

Zeigen Sie, dass $(\tilde{f} * h) * g \sim k$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei X ein einfach-zusammenhängender topologischer Raum. Seien $P, Q \in X$ und $\alpha, \beta\colon I \to X$ stetige Wege von P nach Q. Zeigen Sie, dass $\alpha \sim \beta$.

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Seien X ein topologischer Raum und $\alpha\colon I \to X$ ein stetiger Weg. Sei $x_0\colon = \alpha(0)$ und $x_1\colon = \alpha(1)$. Definieren Sie eine Abbildung

$$\pi_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

durch $\pi_\alpha([f]) = [\tilde{\alpha} * f * \alpha]$. In der Vorlesung wurde gezeigt dass π_α ein Isomorphismus von Gruppen ist.

a) Sei $\beta\colon I \to X$ eine stetige Weg mit $\beta(0) = \alpha(0)$ und $\beta(1) = \alpha(1)$. Zeigen Sie, dass

$$\alpha \sim \beta \quad \Rightarrow \quad \pi_\alpha = \pi_\beta.$$

b) Zeigen Sie, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine abelsche Gruppe ist, wenn π_α nicht vom Weg α zwischen x_0 und x_1 abhängt.