Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
21.4.2016

Topologie: Übungsblatt 2

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 28.4.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Wir betrachten die Menge $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$, d.h. X besteht aus $\mathbb{R}$ und einem weiteren Punkt $*$. Wir sagen $U \subset X$ is offen wenn gilt :

i) Zu jedem Punkt $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$.

ii) Wenn $* \in U$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $(-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \subset U$.

Dieser Raum wird "Gerade mit zwei Nullen" genannt.

a) Zeigen Sie, dass dies in der Tat eine Topologie auf X definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : X \to X$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn} \quad x \neq 0, *, \\ * & \quad\quad\quad\; x = 0, \\ 0 & \quad\quad\quad\; x = *, \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Wir betrachten die Menge $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, d.h. Y besteht aus $\mathbb{R}$ und einem weiteren Punkt ∞. Wir sagen $U \subset Y$ ist offen wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind :

i) Zu jeden Punkt, $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$.

ii) Wenn $\infty \in U$, dann gibt es ein $C > 0$, sodass $(-\infty, -C) \cup (C, \infty) \subset U$.

Diese Raum wird "Gerade mit einem Punkt im Unendlichen" genannt.

a) Zeigen Sie, dass dies in der Tat eine Topologie auf Y definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : Y \to Y$, definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{wenn} \quad x \neq 0, \infty, \\ \infty & x = 0, \\ 0 & x = \infty, \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

c) Sei $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Finden Sie einen Homöomorphismus $\phi : S^1 \to Y$, und zeigen Sie, dass ϕ tatsächlich ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $M_n(\mathbb{R})$ die Menge der $n \times n$ Matrizen auf $\mathbb{R}$. Identifizieren Sie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

mit $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.

a) Zeigen, Sie, dass die Determinantenfunktion $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist (hier $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathbb{R}$ haben euklidische Topologien). Es ist erlaubt Ergebnisse aus der Vorlesung Analysis (z.b.) zu benutzen.

b) Welche der Mengen

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}, \qquad O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\},$$
$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \qquad SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$

sind offen, geschlossen oder keiner von beiden in $\mathbb{R}^{n^2}$?

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Seien $\mathcal{T}, \mathcal{O}$ Topologien auf $\mathbb{R}$ und $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn} \quad x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f.

b) Zeigen Sie, falls $\mathcal{T} = \mathcal{O} = \mathcal{T}_{\text{eucl}}$ die Euklidische Topologie ist, dass f nicht stetig ist.

c) Zeigen Sie, falls $\mathcal{O} = \mathcal{T}_{\text{eucl}}$, und $\mathcal{T} = \mathcal{B}_l$ (siehe Ubungsblatt 1), dass f stetig ist.