Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
29.11.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 8

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 6.12.17 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Gegeben sind die regulären Flächen

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, \qquad z \neq \pm 1\}, \text{ und}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, \qquad -1 < z < 1\}$$

Skizzieren Sie diese Flächen und zeigen Sie, dass S_1 und S_2 diffeomorph sind.

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = xyz.$$

a) Zeigen Sie, dass $S = f^{-1}(1)$ eine reguläre Fläche ist.

b) Parametrisieren Sie diese Fläche.

c) Geben Sie eine glatte Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ an, sodass $d_p g = 0$ für jeden Punkt $p \in S$ und mit Bild $g(S) = \{1,2,3,4\}$.

Aufgabe 3. (20 Punkte)

Sei S das Bild von $\varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} t\cos(s) \\ s\cos(t) \\ ts \end{pmatrix}.$$

Man kann beweisen, dass die Menge S ist eine reguläre Flache ist. Dies können Sie in dieser Aufgabe als gegeben voraussetzen.

a) Zeigen Sie, dass $D_{(s,t)}\varphi$ für jeden Punkt $(s,t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Rang 2 hat.

b) Zeigen Sie, dass φ injektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die *Koordinatenlinien* von φ (d.h. Kurven der Form $s \mapsto \varphi(s, t_0)$ oder $t \mapsto \varphi(s_0, t)$ für fixierte Werte s_0, t_0) ebene Kurven sind. Welche Koordinatenlinien sind Geraden?