KAPITEL 6

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum von Dimension n, und $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. In diesem Kapitel betrachten wir Endomorphismen von V. Es sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir bezeichnen die Matrix $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ nur mit $A_{\mathbf{v}}(F)$. Satz 5.2.2 gibt uns einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\begin{array}{rcl} A_{\mathbf{v}}\colon \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ F & \mapsto & A_{\mathbf{v}}(F). \end{array} \tag{6.0.1}$$

Also, wenn die Basis $\mathbf{v}$ fest ist, können wir Endomorphismen von V mit den dazugehörigen Matrizen identifizieren. Wir bemerken noch einmal, dass

$$A_{\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) = I_n$$

und F ein Automorphismus ist genau dann, wenn $A_{\mathbf{v}}(F)$ invertierbar ist:

$$F \in GL_{\mathbb{K}}(V) \iff A_{\mathbf{v}}(F) \in GL_n(\mathbb{K})\,,$$

(sehen Sie Korollar 5.2.4) und wir erhalten eine Bijektion

$$A_{\mathbf{v}}\colon GL_{\mathbb{K}}(V) \;\to\; GL_n(\mathbb{K})$$

(Bemerken Sie, dass in obigem Fall, $A_{\mathbf{v}}$ kein Isomorphismus ist! In der Tat haben $GL_{\mathbb{K}}(V)$ und $GL_n(\mathbb{K})$ keine Struktur von Vektorräumen.)

Die Determinante eines Endomorphismus

In diesem Abschnitt wollen wir die Determinante $\det(F)$ eines Endomorphismus F von V definieren. Die Idee ist, den Isomorphismus (6.0.1) zu benutzen. Aber wir sollen zuerst beweisen, dass $\det(A_{\mathbf{v}}(F))$ unabhängig von der Basis $\mathbf{v}$ ist. Wir schreiben $F\colon V \to V$ als

$$V \xrightarrow{\mathbf{1}_V} V \xrightarrow{F} V \xrightarrow{\mathbf{1}_V} V\,,$$

wobei die gewählten Basen bzw. $\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sind. Nach Proposition 5.2.3 und Korollar 5.2.4 erhalten wir, dass

$$A_{\mathbf{w}}(F) = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)A_{\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V))^{-1}A_{\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)\,. \tag{6.0.2}$$

Nach dem Satz 4.2.5 folgt, dass $\det\Big((A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V))^{-1}\Big) = \det\Big(A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)\Big)^{-1}$, also und (6.0.2) impliziert, dass

$$\det\Big(A_{\mathbf{w}}(F)\Big) = \det\Big(A_{\mathbf{v}}(F)\Big)\,. \tag{6.0.3}$$

Gleichung (6.0.2) beweist, dass $\det\Big(A_{\mathbf{v}}(F)\Big)$ von der Basis $\mathbf{v}$ ist, und wir bezeichnen sie mit $\det(F)$.

Definition 6.0.1
Es sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Endomorphismus von V. Dann nennen wir $\det(F) \in \mathbb{K}$ die *Determinante des Endomorphismus F*.

Ähnliche Matrizen

Definition 6.0.2
Wir sagen, dass zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *ähnlich* (oder *konjugiert*) sind, falls es eine invertierbare Matrix $M \in GL_n(\mathbb{K})$ gibt, sodass

$$B = M^{-1}AM\,.$$

Wir schreiben $A \sim B$

Bemerkung 6.0.1 (i) Gegeben $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und Basen $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ von V, impliziert (6.0.2), dass die Matrizen $A_{\mathbf{v}}(F)$ und $A_{\mathbf{w}}(F)$ ähnlich sind.

(ii) Wir bemerken, dass $\det(A) = \det(B)$ wenn $A \sim B$.

Lemma 6.0.1
$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $M_n(\mathbb{K})$.

Beweis. (Reflexivität) $A \sim A$, weil $A = I_n^{-1}AI_n$.

(Symmetrie) Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A \sim B$, also existiert $M \in GL_n(\mathbb{K})$ sodass $B = M^{-1}AM$. Diese Gleichung ist äquivalent zu $MB = MM^{-1}AM = AM$, und zu $MBM^{-1} = AMM^{-1} = A$, also $A = MBM^{-1} = (M^{-1})^{-1}BM^{-1}$, und $B \sim A$.

(Transitivität) Es seien $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$, sodass $A \sim B$ und $B \sim C$. Dann existieren $M_1, M_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ sodass $B = M_1^{-1}AM_1$ und $C = M_2^{-1}BM_2$, also $C = M_2^{-1}M_1^{-1}AM_1M_2 = (M_1M_2)^{-1}A(M_1M_2)$, und $A \sim C$. □

Vorlesung 24 - 26.01.2017

Proposition 6.0.2
Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann sind A und B genau dann ähnlich, wenn es einen Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und Basen $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von V gibt, mit $A = A_{\mathbf{v}}(F)$ und $B = A_{\mathbf{w}}(F)$.

Beweis. Wir haben schon bemerkt, dass die Matrizen $A_{\mathbf{v}}(F)$, $A_{\mathbf{w}}(F)$ bezüglich verschiedener Basen $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ eines Endomorphismus F ähnlich sind. (Bemerkung 6.0.1 (i).)

Umgekehrt, seien A und B ähnliche Matrizen. Es sei $\mathbf{v}$ eine Basis von V, und $F := L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(A)$; dann $A = A_{\mathbf{v}}(F)$ (Sehen Sie den Beweis des Satzes 5.2.2). Wir wollen eine Basis $\mathbf{w}$ von V finden, sodass $B = A_{\mathbf{w}}(F)$. Um $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ zu finden, benutzen wir Gleichung (6.0.2). Es sei $M \in GL_n(\mathbb{K})$, sodass $B = M^{-1}AM$.

A-posteriori muss $M = A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)$ gelten. Deshalb sei w_i der Vektor in V, dessen Koordinaten bezüglich der Basis v genau die Elemente der i-ten Spalte von M sind, also $w_i = m_{1i}v_1 + \cdots + m_{ni}v_n$, für jedes $i = 1, \ldots, n$. Da M invertierbar ist, impliziert Korollar 5.2.7, dass $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V ist. Außerdem ist per definitionem von $\mathbf{w}$ die Matrix M genau $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)$, und nach Gleichung (6.0.2) haben wir

$$A_{\mathbf{w}}(F) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V))^{-1}A_{\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) = M^{-1}AM = B\,.$$

□

6.1 Diagonalisierbare Endomorphismen und diagonalisierbare Matrizen

Definition 6.1.1 (a) Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix $D \in M_n(\mathbb{K})$, bei der alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonale Null sind. Äquivalent gesagt, wenn $D = (d_{ij})$, dann ist D eine Diagonalmatrix genau dann, wenn $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$, also

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})\,.$$

(b) Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathbf{v}$ von V gibt, sodass $A_{\mathbf{v}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist, also

$$A_{\mathbf{v}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(c) Eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *diagonalisierbar*, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, also wenn es eine Matrix $M \in GL_n(\mathbb{K})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, sodass

$$M^{-1}AM = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,.$$

Bemerkung 6.1.1
Proposition 6.0.2 impliziert, dass $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ diagonalisierbar ist genau dann, wenn $A_{\mathbf{v}}(F)$ diagonalisierbar ist.

Insbesondere, sei $V = \mathbb{K}^n$ und $B \in M_n(\mathbb{K})$. Dann ist B diagonalisierbar genau dann, wenn die Abbildung F_B definiert in (5.2.4) diagonalisierbar ist.

Es sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann

$$F(v_i) = \lambda_i v_i \quad \text{für alle } \ i = 1, \ldots, n \tag{6.1.1}$$

genau dann, wenn $A_{\mathbf{v}}(F) = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

In diesem Abschnitt werden wir verstehen, wann ein Endomorphismus (oder eine Matrix) diagonalisierbar ist.

Beispiel 6.1.1
In Aufgabe 5.4 haben Sie bewiesen, dass falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$ jeder Endomorphismus $F\colon V \to V$ der Gestalt $F = \lambda \mathbf{1}_V$ ist (wobei $\lambda \in \mathbb{K}$). Also, jeder Endomorphismus eines eindimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums ist diagonalisierbar. (In diesem Fall ist $A_{\mathbf{v}}(F)$ diagonal, für jede Basis $\mathbf{v}$!).

Falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) > 1$, kann man Endomorphismen finden, die nicht diagonalisierbar sind. Um diagonalisierbare Endomorphismen zu charakterisieren brauchen wir mehr Theorie.

Definition 6.1.2

- Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Eigenvektor*, falls $v \neq \mathbf{0}$ und gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass

  $$F(v) = \lambda v\,.$$

  Der Skalar λ heißt *Eigenwert* von F, und wir sagen, dass v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

  Die Menge der Eigenwerte von F wird *Spektrum* genannt und $\sigma(F)$ geschrieben, also

  $$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}, F(v) = \lambda v\}\,.$$

- Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ein *Eigenvektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ von A ist ein Eigenvektor der linearen Abbildung $F_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert in (5.2.4). Ähnlich, ein *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{K}$ von A ist ein Eigenwert von F_A. Falls $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ ist, dann haben wir

  $$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\,,$$

  wobei $\mathbf{x}$ als Spaltenvektor betrachtet wird.

Beispiel 6.1.2
Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und F der Endomorphismus $\lambda \mathbf{1}_V$, wobei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist jeder Vektor $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Es sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus, der nicht injektiv ist. Dann ist jeder Vektor in $\mathrm{Ker}(F) \setminus \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Bemerkung 6.1.2
Die Voraussetzung $v \neq \mathbf{0}$ in der Definition eines Eigenvektors von F ist wichtig, weil sie die *Eindeutigkeit* des Eigenwerts des Eigenvektors v impliziert. In der Tat, sei $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Eigenvektor zum $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\mu \in \mathbb{K}$, dann $F(v) = \lambda v = \mu v$, also $(\lambda - \mu)v = \mathbf{0}$. Weil $v \neq \mathbf{0}$, erhalten wir $\lambda = \mu$. (Falls $v = \mathbf{0}$, dann $(\lambda - \mu)\mathbf{0} = \mathbf{0}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.)

Der Eigenraum zu einem Eigenwert

Es sei $\lambda \in \sigma(F)$ ein Eigenwert von F. Wir definieren

$$V_\lambda(F) = \{v \in V \mid v \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\} \subseteq V\,.$$

Wir nennen $V_\lambda(F)$ den *Eigenraum von F zum Eigenwert λ*. Die nächste Proposition sagt uns, dass $V_\lambda(F)$ eine wichtige Struktur hat.

Proposition 6.1.1
$V_\lambda(F)$ ist ein Unterverktorraum von V.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $V_\lambda(F) \neq \emptyset$, weil $\mathbf{0} \in V_\lambda(F)$. Wir sollen beweisen, dass gegeben beliebige Skalare $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ und Vektoren $v_1, v_2 \in V_\lambda(F)$, dann $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_\lambda(F)$. Falls $k_1v_1 + k_2v_2 = \mathbf{0}$, dann nach der Definition von $V_\lambda(F)$ können wir schließen, dass $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_\lambda(F)$. Falls nicht, dann sollen wir beweisen, dass $F(k_1v_1 + k_2v_2) = \lambda(k_1v_1 + k_2v_2)$. Wir haben

$$F(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1F(v_1) + k_2F(v_2) = k_1\lambda v_1 + k_2\lambda v_2 = \lambda(k_1v_1 + k_2v_2),$$

und die Behauptung folgt. □

Gegeben $A \in M_n(\mathbb{K})$, dann nennen wir $V_\lambda(A)$ den *Eigenraum von A zum Eigenwert λ*, wobei $V_\lambda(A) := V_\lambda(F_A)$.

Proposition 6.1.2
Es sei $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ Eigenvektoren von F zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Falls $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$, dann sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig.

Also sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Proposition mit Induktion nach k. Falls $k = 1$, dann ist v_1 linear unabhängig, weil $v_1 \neq \mathbf{0}$ (Aufgabe 3.9 a)). Jetzt nehmen wir an, dass $k \geq 2$. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ Skalare und

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_kv_k = \mathbf{0}\,. \tag{6.1.2}$$

Also

$$\mathbf{0} = F(\mathbf{0}) = F(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_kv_k) = \lambda_1\alpha_1v_1 + \lambda_2\alpha_2v_2 \dots + \lambda_k\alpha_kv_k. \tag{6.1.3}$$

Andererseits, wenn wir (6.1.2) durch λ_1 multiplizieren, erhalten wir

$$\lambda_1\alpha_1 v_1 + \lambda_1\alpha_2 v_2 \cdots + \lambda_1\alpha_k v_k = \mathbf{0}. \tag{6.1.4}$$

Wenn man die Gleichung (6.1.4) von (6.1.3) subtrahiert, dann haben wir

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = \mathbf{0}\,.$$

Nach Induktion sind die Eigenvektoren $v_2, \ldots, v_k$ linear unahängig, also muss $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$ gelten, für alle $i = 2, \ldots, k$. Weil $\lambda_i \neq \lambda_1$ für alle $i \geq 2$, folgt es, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i = 2, \ldots, k$. Nach (6.1.2) haben wir, dass $\alpha_1 = 0$, weil $v_1 \neq \mathbf{0}$. Also müssen alle Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ Null sein, und die Behauptung folgt. □

Vorlesung 25 - 30.01.2017

Proposition 6.1.3
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Nehmen wir an, dass jeder $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Eigenvektor von F ist. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $F = \lambda\mathbf{1}_V$.

Beweis. Falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 1$, dann haben wir schon bemerkt, dass ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $F = \lambda\mathbf{1}_V$ (Aufgabe 5.4). Also können wir annehmen, dass $\dim_{\mathbb{K}}(V) \geq 2$. Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Nach Voraussetzung existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (nicht unbedingt unterschiedlich), sodass $F(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zuerst wollen wir beweisen, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Seien $1 \leq i \neq j \leq n$ und $v_{ij} := e_i + e_j$. Nach Voraussetzung existiert $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$, sodass

$$F(v_{ij}) = \lambda_{ij}v_{ij} = \lambda_{ij}(e_i + e_j).$$

Andererseits, durch Linearität von F, erhalten wir

$$F(v_{ij}) = F(e_i + e_j) = F(e_i) + F(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j.$$

Mit Hilfe der obigen Gleichungen haben wir $(\lambda_{ij} - \lambda_i)e_i + (\lambda_{ij} - \lambda_j)e_j = \mathbf{0}$. Weil e_i, e_j linear unabhängig sind, erhalten wir $\lambda_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$. Weil i und j beliebig sind, haben wir, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$; nennen wir diesen Skalar λ. Weil $F(e_i) = \lambda e_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und weil $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V ist, haben wir, dass $F(v) = \lambda v$ für alle $v \in V$, also $F = \lambda\mathbf{1}_V$. □

6.1.1 Das charakteristische Polynom

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Methode, um Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus F zu finden. Ein wichtiges Konzept ist gegeben durch das charakteristische Polynom. Um die Definition dieses Polynoms zu rechtfertigen, brauchen wir folgende:

Proposition 6.1.4
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von F genau dann, wenn der Endomorphismus

$$F - \lambda \mathbf{1}_V : V \to V$$

definiert als $(F - \lambda \mathbf{1}_V)(v) = F(v) - \lambda(v)$ für alle $v \in V$, nicht injektiv ist.

Bemerkung 6.1.3
Nach Korollar 5.1.6, ist $G := F - \lambda \mathbf{1}_V$ nicht injektiv genau dann, wenn $G \notin GL_{\mathbb{K}}(V)$ (also, wenn G kein Automorphismus ist). Nach Korollar 5.2.4, $G \notin GL_{\mathbb{K}}(V)$ genau dann, wenn $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(G) \notin GL_n(\mathbb{K})$, wobei $\mathbf{v}$ eine beliebige Basis von V ist. Ferner, nach Satz 4.2.5, gilt $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(G) \notin GL_n(\mathbb{K})$ genau dann, wenn $\det(A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(G)) = \det(G) = 0$. Also können wir Proposition 6.1.4 neu fassen:

$$\boxed{\textit{Ein Skalar } \lambda \in \mathbb{K} \textit{ ist ein Eigenwert von } F \textit{ genau dann, wenn } \det(F - \lambda \mathbf{1}_V) = 0.}$$

Beweis. Der Endomorphismus $F - \lambda \mathbf{1}_V$ ist nicht injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Ker}(F - \lambda \mathbf{1}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$, also genau dann, wenn ein Vektor $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ existiert, sodass $(F - \lambda \mathbf{1}_V)(v) = \mathbf{0}$. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$F(v) = \lambda v$$

und $v \in \operatorname{Ker}(F - \lambda \mathbf{1}_V) \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist ein Eigenvektor von F. □

Um die Proposition 6.1.4 zu benutzen, müssen wir eine Basis $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ wählen, um $\det(A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F - \lambda \mathbf{1}_V))$ explizit zu berechnen. Es sei

$$A := A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Da $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F - \lambda \mathbf{1}_V) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) - A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\lambda \mathbf{1}_V)$, und

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\lambda \mathbf{1}_V) = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda),$$

haben wir, dass

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F-\lambda \mathbf{1}_V) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Diese Berechnung begründet folgende:

Definition 6.1.3
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix mit Koeffizienten $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, und x eine Unbekannte. Die Determinante der Matrix

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

ist ein Polynom $P_A(x) \in \mathbb{K}[x]$ und heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.

Wir wollen das charakteristische Polynom eines Endomorphismus F definieren. Die Idee ist die Matrix $A := A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ zu benutzen um $P_F(x)$ als $P_A(x)$ zu definieren. Aber diese Matrix hängt von der Basis $\mathbf{v}$ ab. Wir erinnern uns daran, dass zwei Matrizen $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{w}}(F)$ bezüglich verschiedener Basen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ von V ähnlich sind (Sehen Sie Bemerkung 6.0.1). Dann, um $P_F(x)$ zu definieren, brauchen wir nur das folgende:

Lemma 6.1.5
Gegeben zwei ähnliche Matrizen A und B, gilt

$$P_A(x) = P_B(x)\,.$$

Beweis. Es sei $M \in GL_n(\mathbb{K})$, sodass $B = M^{-1}AM$. Dann

$$B - xI_n = M^{-1}AM - xI_n = M^{-1}AM - xM^{-1}I_nM = M^{-1}(A - xI_n)M\,.$$

Nach Satz 4.2.5 erhalten wir, dass $\det(B - xI_n) = \det(A - xI_n)$, und die Behauptung folgt. $\square$

Definition 6.1.4
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Das *charakteristische Polynom* von F, bezeichnet mit $P_F(x) \in \mathbb{K}[x]$, ist das charakteristische Polynom der Matrix $A = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$, wobei $\mathbf{v}$ eine beliebige Basis von V ist.

Noch einmal, nach Lemma 6.1.5 ist dieses Polynom unabhängig von der Basis $\mathbf{v}$.

Bemerkung 6.1.4
Das charakteristische Polynom $P_F(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades. Der Koeffizient von x^n ist $(-1)^n$ (Übung).

Die folgende wichtige Behauptung wird in der Vorlesung *Algebra* bewiesen:

Satz 6.1.6
Ein Polynom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ n-ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$, d. h. es gibt höchstens n verschiedene Skalare $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, k \leq n$, sodass $P(x_i) = 0$.

Mit obigem Satz können wir folgendes Korollar beweisen:

Korollar 6.1.7
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von F genau dann, wenn λ eine Nullstelle von $P_F(x)$ ist. Insbesondere besitzt F höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Beweis. Die erste Behauptung ist eine Folgerung der Proposition 6.1.4 (und der äquivalenten Bemerkung 6.1.3) und der Definition von $P_F(x)$. Die zweite eine Folgerung des Satzes 6.1.6. □

Dieses Korollar gibt uns eine Methode, um die Eigenwerte von $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zu finden: wir müssen die Nullstellen von $P_F(x)$ berechnen.

Bemerkung 6.1.5
Gegeben ein Körper $\mathbb{K}$, dann kann ein Polynom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ *keine* Nullstellen besitzen. Zum Beispiel, sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $P(x) = x^2 + 1$. Dann besitzt P keine reellen Nullstellen. Aber, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*, dass jedes nicht konstante Polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Zum Beispiel, hat das Polynom $P(x)$, betrachtet als Polynom in $\mathbb{C}[x]$, die Nullstellen $\pm\mathrm{i}$.

Beispiel 6.1.3

1. Das charakteristische Polynom der Einheitsmatrix I_n ist gegeben durch

$$P_{I_n}(x) = (1 - x)^n \,.$$

   Also ist $1 \in \mathbb{K}$ der einzige Eigenwert der Matrix I_n (wie wir schon wissen!).

2. Das charakteristische Polynom der Nullmatrix $O \in M_n(\mathbb{K})$ ist gegeben durch

$$P_O(x) = (-1)^n x^n \,.$$

   Also ist $0 \in \mathbb{K}$ der einzige Eigenwert der Matrix O (wie wir schon wissen!!).

3. Das charakteristische Polynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
ist gegeben durch $P_A(x) = x^2 + 1$. Dieses Polynom besitzt keine Nullstelle falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Also hat die Matrix A keine Eigenwerte (und keine Eigenvektoren), wenn betrachtet als reelle Matrix. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dann hat A Eigenwerte $\pm$i.

Vorlesung 26 - 02.02.2017

4. Wir erinnern uns daran, dass eine *obere Dreiecksmatrix* $A^+ = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ die Gleichungen $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ erfüllt, also ist A^+ der Gestalt
$$A^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
und alle Einträge von A^+ unterhalb der Hauptdiagonale sind Null. In Aufgabe 4.7 haben Sie bewiesen, dass $\det(A^+) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Da xI_n eine obere Dreiecksmatrix ist, und da die Differenz zwischen zwei oberen Dreiecksmatrizen noch eine obere Dreiecksmatrix ist, erhalten wir, dass $A^+ - xI_n$ eine obere Dreiecksmatrix ist und
$$P_{A^+}(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\cdots(a_{nn} - x)\,.$$
Es sei $A^- = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ eine *untere Dreiecksmatrix*, also $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$, und A^- ist der Gestalt
$$A^- = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Dann erhalten wir, dass
$$P_{A^-}(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\cdots(a_{nn} - x)\,.$$
(Warum?) Wir können schließen, dass die Eigenwerte einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix genau die Einträge der Hauptdiagonale $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sind.

Die folgende Proposition ist eine Folgerung von (6.1.1):

Proposition 6.1.8
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Dann ist F diagonalisierbar genau dann, wenn V eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ besitzt, sodass $F(v_i) = \lambda_i v_i$.

Folgender Satz ist sehr wichtig, und gibt uns eine Methode um zu verstehen, wann $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, oder wann $A \in M_n(\mathbb{K})$, diagonalisierbar ist.

Satz 6.1.9
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Es sei $\sigma(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ das Spektrum von F. Dann gilt die folgende Ungleichung:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}(F)) + \cdots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_k}(F)) \leq n\,, \tag{6.1.5}$$

und die Gleichung gilt genau dann, wenn F diagonalisierbar ist.

Gegeben $\lambda \in \sigma(F)$, dann heißt die Dimension $d(\lambda)$ von $V_\lambda(F)$ die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Beweis. Es sei $d(i) := d(\lambda_i)$ die Dimension von $V_{\lambda_i}(F)$ und $\{v_{i1}, \ldots, v_{id(i)}\}$ eine Basis von $V_{\lambda_i}(F)$, für alle $i = 1, \ldots, k$. Nach Satz 3.2.7, um (6.1.5) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Vektoren

$$v_{11}, \ldots, v_{1d(1)}, v_{21}, \ldots, v_{2d(2)}, \ldots, v_{k1}, \ldots, v_{kd(k)} \tag{6.1.6}$$

linear unabhängig sind. Es sei

$$\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{1d(1)}v_{1d(1)} + \alpha_{21}v_{21} + \cdots + \alpha_{2d(2)}v_{2d(2)} + \cdots + \alpha_{k1}v_{k1} + \cdots + \alpha_{kd(k)}v_{kd(k)} = \mathbf{0} \tag{6.1.7}$$

eine Null-lineare Kombination, wobei $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ für alle i, j. Wir definieren v_i als $\alpha_{i1}v_{i1} + \cdots + \alpha_{id(i)}v_{id(i)} \in V_{\lambda_i}(F)$, für alle $i = 1, \ldots, k$. Wir können (6.1.7) als

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k = \mathbf{0} \tag{6.1.8}$$

schreiben. Wir bemerken, dass $v_i = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\alpha_{i1} = \ldots = \alpha_{id(i)} = 0$, für alle $i = 1, \ldots, k$. Also, um zu beweisen, dass die Vektoren in (6.1.6) linear unabhängig sind, genügt es zu beweisen, dass $v_1 = v_2 = \ldots = v_k = \mathbf{0}$. Falls die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ nicht alle Null wären, dann nach (6.1.8) hätte die Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ mindestens zwei Elemente. Nennen wir diese Elemente $v_{h_1}, \ldots, v_{h_l}$, für ein $l \leq k$. In diesem Fall, nach (6.1.8) würden wir erhalten, dass $v_{h_1} + \cdots + v_{h_l} = \mathbf{0}$. Also wären $v_{h_1}, \ldots, v_{h_l}$ linear abhängig. Aber liegen die v_{h_i} in verschiedenen Eigenräumen, und nach Proposition 6.1.2 ist dies ein Widerspruch.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, bemerken wir, dass falls $d(1) + \cdots + d(k) = n$, sind die Vektoren in (6.1.6) eine Basis $\mathbf{v}$ von V, und $A_{\mathbf{v}}(F)$ ist eine Diagonalmatrix. Also ist F diagonalisierbar. Umgekehrt, falls F diagonalisierbar ist, dann kann man beweisen, dass die Gleichung $d(1) + \cdots + d(k) = n$ gelten muss. $\square$

Als Folgerung haben wir:

Korollar 6.1.10
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Falls F n verschiedene Eigenwerte besitzt, dann ist F diagonalisierbar.

Beweis. Weil $\dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda(F)) \geq 1$ für alle $\lambda \in \sigma(F)$, wenn $|\sigma(F)| = n$ erhalten wir

$$\sum_{\lambda \in \sigma(F)} \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda(F)) \geq n\,.$$

Nach (6.1.5) haben wir, dass die Gleichung gelten muss, und Satz 6.1.9 impliziert, dass F diagonalisierbar ist. □

Fragen und Vertiefungen 6.1.1
Korollar 6.1.10 sagt uns, dass falls $|\sigma(F)| = n$, dann ist F diagonalisierbar. Können wir sagen, dass falls F diagonalisierbar ist, dann $|\sigma(F)| = n$?

Beispiel 6.1.4
In Beispiel 6.1.3, 4. haben wir schon bemerkt, dass das charakteristische Polynom einer oberen Dreiecksmatrix A^+ das Polynom $P_{A^+}(x) = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$ ist. Also sind die Eigenwerte von A^+ genau $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. Nach Korollar 6.1.10 folgt es, dass falls $a_{ii} \neq a_{jj}$ für alle $i \neq j$, dann ist A^+ diagonalisierbar.

Falls $a_{ii} = a_{jj}$ für $i \neq j$, dann kann A^+ nicht diagonalisierbar sein. Zum Beispiel, es sei

$$A^+ := \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei nicht alle $*$ Null sind. Dann ist A^+ nicht diagonalisierbar. In der Tat, weil $a_{ii} = 0$ für alle i, ist der einzige Eigenwert gleich Null. Falls A^+ diagonalisierbar wäre, dann wäre sie ähnlich zu der Nullmatrix O. Aber, falls $B \sim O$, dann ist $B = O$, weil $B = M^{-1}OM = O$ für alle $M \in GL_n(\mathbb{K})$! Weil $A^+ \neq O$, erhalten wir einen Widerspruch.

Eine Methode um die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu finden

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir möchten die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von F finden. Es sei $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.

1. Dann sind die Eigenwerte von F genau die Eigenwerte von $A_{\mathbf{v}}(F) =: A$, also, die Nullstellen von $P_A(x)$.

2. Die Eigenvektoren von F sind per definitionem die Vektoren $v \neq \mathbf{0}$, sodass $F(v) = \lambda v$. Falls $(x_1, \ldots, x_n)$ die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathbf{v}$ sind, dann für jeden Eigenwert λ, ist die Gleichung $F(v) = \lambda v$ äquivalent zu

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.9}$$

   (Sehen Sie Proposition 5.2.1) Also können wir schließen, dass die Koordinaten (bezüglich der Basis $\mathbf{v}$) der Eigenvektoren zum Eigenwert λ genau die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems (6.1.9) sind.

3. Wir bemerken, dass (6.1.9) nicht nur die triviale Lösung besitzt! In der Tat, sagt der Satz von Kronecker-Rouché-Capelli, dass (6.1.9) $\infty^{n-r(A-\lambda I_n)}$-Lösungen besitzt. Weil $A - \lambda I_n$ *nicht invertierbar* ist ($\det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda) = 0$), dann ist $r(A - \lambda I_n) < n$.

   Es sei $\Sigma_0(\lambda)$ die Menge der Lösungen des Systems (6.1.9). Wir haben schon bemerkt, dass $\dim(\Sigma_0(\lambda)) = n - r(A - \lambda I_n)$ (Sehen Sie Vorlesung 23). Außerdem, können wir $\Sigma_0(\lambda)$ mit $V_\lambda(F)$ identifizieren durch $\Sigma_0 \ni (x_1, \ldots, x_n) \to x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V_\lambda(F)$, und dann

$$d(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(V_\lambda(F)) = \dim_{\mathbb{K}}(\Sigma_0(\lambda)) = n - r(A - \lambda I_n). \tag{6.1.10}$$

   Für jedes $\lambda \in \sigma(F)$ finden wir eine Basis $\{v_{\lambda 1}, \ldots, v_{\lambda d(\lambda)}\}$ des Eigenraums $V_\lambda(F)$.

4. Falls

$$\sum_{\lambda \in \sigma(F)} d(\lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma(F)} (n - r(A - \lambda I_n)) = n,$$

   impliziert Satz 6.1.9, dass F diagonalisierbar ist und die Basis $\mathbf{v}'$, sodass die Matrix $A_{\mathbf{v}'}(F)$ diagonal ist, ist gegeben durch

$$\bigcup_{\lambda \in \sigma(F)} \{v_{\lambda 1}, \ldots, v_{\lambda d(\lambda)}\}.$$

   (Sehen Sie den Beweis des Satzes 6.1.9.)

Vorlesung 27 - 06.02.2017

Übung. Es sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie das charakteristische Polynom $P_A(x)$, die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Bemerkung 6.1.6
Spezielle Eigenwerte

- ($\lambda = \mathbf{0}$) Gegeben eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, falls $0 \in \sigma(A)$, dann sind die Eigenvektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ (wir betrachten $\mathbf{x}$ als Spaltenvektor) zum Eigenwert $\lambda = 0$ genau die Vektoren im Kern von A, also die Vektoren die

  $$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.1.11}$$

  erfüllen.

  Weil $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_0(A)$, dann hat das System nicht nur die triviale Lösung.

  Übung Beweisen Sie, dass $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar ist genau dann, wenn $0 \notin \sigma(A)$.

- ($\lambda = \mathbf{1}$) Gegeben eine nicht-leere Menge X und eine Abbildung $f\colon X \to X$, ein *Fixpunkt* von f ist ein $x \in X$, sodass $f(x) = x$.

  Falls X ein Vektorraum V ist, und $f = F$ ein Endomorphismus von V, dann ist $v \in V$ ein Fixpunkt von F genau dann, wenn $F(v) = v$ oder, äquivalent gesagt, wenn v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Wir bemerken, dass falls der Körper $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente besitzt, und falls $1 \in \sigma(F)$, dann besitzt die Menge der Fixpunkte unendlich viele Elemente.

Beispiel 6.1.5
Achsenspiegelungen in $\mathbb{R}^2$ Es sei l eine Ursprungsgerade, d.h. eine Gerade, die durch den Ursprung $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ verläuft. Es sei $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Achsenspiegelung durch l. Diese Abbildung ist linear. Dann sind die Fixpunkte von S genau die Vektoren in l (wir identifizieren die Punkte in l mit den Vektoren in $\mathbb{R}^2$ von $\mathbf{0}$ nach einem Punkt in l). Also ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von S mit Eigenraum gegeben durch l. Es sei l' die Ursprungsgerade, die senkrecht auf l ist. Dann $S(v) = -v$ für alle $v \in l'$. Also ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert von S mit Eigenraum l'. Weil $\dim_{\mathbb{R}}(l) = \dim_{\mathbb{R}}(l') = 1$, dann ist S diagonalisierbar.

VORLESUNGEN

Vorlesung 1 - , 20.10.2016 2
Vorlesung 2 - , 24.10.2016 8
Vorlesung 3 - , 27.10.2016 13
Vorlesung 4 - , 31.10.2016 20
Vorlesung 5 - , 03.11.2016 25
Vorlesung 6 - , 07.11.2016 30
Vorlesung 7 - , 10.11.2016 34
Vorlesung 8 - , 14.11.2016 38
Vorlesung 9 - , 17.11.2016 44
Vorlesung 10 - , 21.11.2016 49
Vorlesung 11 - , 24.11.2016 52
Vorlesung 12 - , 28.11.2016 57
Vorlesung 13 - , 01.12.2016 59
Vorlesung 14 - , 05.12.2016 62
Vorlesung 15 - , 08.12.2016 66
Vorlesung 16 - , 12.12.2016 70
Vorlesung 17 - , 15.12.2016 75
Vorlesung 18 - , 19.12.2016 78
Vorlesung 19 - , 09.01.2017 86
Vorlesung 20 - , 12.01.2017 90
Vorlesung 21 - , 16.01.2017 93
Vorlesung 22 - , 19.01.2017 96
Vorlesung 23 - , 23.01.2017 100
Vorlesung 24 - , 26.01.2017 103
Vorlesung 25 - , 30.01.2017 107
Vorlesung 26 - , 02.02.2017 111
Vorlesung 27 - , 06.02.2017 115