Prof. Dr. Silvia Sabatini — Wintersemester 2015/2016

Klausur Elementare Differentialgeometrie 6CP

04.04.16, 11:30 – 14:30

Es sind keine Hilfsmittel (Skript, Taschenrechner...) erlaubt. Täuschungsversuche, auch zugunsten anderer, führen zum Ausschluß von der Klausur. Taschen, Jacken und Mobiltelephone etc. sind im Hörsaal vorne zu deponieren. Wird das Mobiltelephon o.ä. nicht abgegeben, so gilt dies als Täuschungsversuch.
Begründen Sie stets Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung liefern keine Punkte.
Die Aufgaben sind auf den entsprechenden Blättern (einschließlich Rückseite) zu bearbeiten. Falls Sie die am Ende angehefteten Leerseiten benutzen, machen Sie bitte einen Verweis bei der jeweiligen Aufgabe. Die Notizzettel können **nicht** mit abgegeben werden. Verwenden Sie ausschließlich schwarze oder blaue Tinte/Kugelschreiber.
Die Klausur umfaßt 4 Aufgaben.

Name : **Matrikelnummer :**

Studiengang :

Unterschrift

Den unteren Teil dieses Blattes **nicht** beschriften!

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte
1			4	
2				
3				
Gesamt :				

Aufgabe 1. (4+6 Punkte)

Seien $a > 0$ und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 2a\cos(t) + a\cos(2t) \\ 2a\sin(t) - a\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Kurve regulär?

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve β von $\beta(0)$ bis $\beta(\frac{\pi}{3})$.

<u>Lösung</u> 1.

a) Wir berechnen

$$\dot{\beta}(t) = 2a \begin{pmatrix} -\sin(t) - \sin(2t) \\ \cos(t) - \cos(2t) \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned}
\|\dot{\beta}(t)\| &= 4a^2 \left(\sin^2(t) + 2\sin(t)\sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2(t) - 2\cos(t)\cos(2t) + \cos^2(2t)\right) \\
&= 8a^2 \left(1 + \frac{(e^{it} - e^{-it})(e^{2it} - e^{-2it})}{-4} - \frac{(e^{it} + e^{-it})(e^{2it} + e^{-2it})}{4}\right) \\
&= 8a^2 \left(1 - \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}\right) = 8a^2 \left(1 - \cos(3t)\right).
\end{aligned}$$

Die Kurve β is regulär falls $1 - \cos(3t) \neq 0$ und das ist falls $t \neq \frac{2\pi k}{3}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
L(t) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \|\dot{\beta}(t)\| dt &= \sqrt{8}a \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - \cos(3t)} dt \\
&= \frac{\sqrt{8}a}{3} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(u)} du \\
&= \frac{\sqrt{8}a}{3} \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2(\frac{u}{2})} du \\
&= \frac{4a}{3} \left(-2\cos(u/2)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8a}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (5+5 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Erinneren Sie sich an die Frenet-Gleichungen für das begleitende Dreibein der Kurve α :

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{v}}(s) &= \kappa(s)\,\underline{n}(s), \\
\dot{\underline{n}}(s) &= -\kappa(s)\,\underline{v}(s) + \tau(s)\,\underline{b}(s), \\
\dot{\underline{b}}(s) &= -\tau(s)\,\underline{n}(s).
\end{aligned}$$

Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(s,\varphi) = \alpha(s) + r\big(\cos(\varphi)\,\underline{n}(s) + \sin(\varphi)\,\underline{b}(s)\big), \qquad \text{wobei} \qquad r > 0.$$

a) Zeigen Sie, falls $0 < r < \frac{1}{\kappa(s)}$, dass $D_{(s,\varphi)}F$ Rang 2 hat.

b) Falls wir die Definitionsmenge der Funktion F geeignet einschränken, ist das Bild von F eine Fläche S. Zeigen Sie, dass

$$N(s,\varphi) = -(\cos(\varphi)\,\underline{n}(s) + \sin(\varphi)\,\underline{b}(s))$$

ein Einheitsnormalenfeld auf S definiert.

<u>Lösung</u> 2.

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(s,\varphi) &= \underline{v}(s) + r(\cos(\varphi)\dot{\underline{n}}(s) + \tau(s)\sin(\varphi)\dot{\underline{b}}(s)) \\ &= (1 - r\kappa(s)\cos(\varphi))\,\underline{v}(s) - r\tau(s)\sin(\varphi)\,\underline{n}(s) + r\tau(s)\cos(\varphi)\,\underline{b}(s).\end{aligned}$$

Hier haben wir die Frenet Gleichungen benutzt. Und

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(s,\varphi) = -r\sin\varphi\,\underline{n}(s) + r\cos(\varphi)\,\underline{b}(s).$$

Wir sehen, das in der basis $\{\underline{v}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ die Abbildung $D_{(s,\varphi)}F$ geschrieben werden kann als,

$$D_{(s,\varphi)}F = \begin{pmatrix} 1 - r\kappa(s)\cos(\varphi) & 0 \\ -r\tau(s)\sin(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ r\tau(s)\cos(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Wir sehen das die matrix rang zwei hat falls die komponent des ersten Vektors nicht null is (da die zweite Vektor nimmer gleich Null ist und erste komponent null). Aber das ist so falls $r < \frac{1}{\kappa(s)}$.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}(s,\varphi) &= -r\sin(\varphi)(1 - r\kappa(s)\cos(\varphi))\,\underline{v}(s) \times \underline{n}(s) - r^2\tau(s)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,\underline{b}(s) \times \underline{n}(s) \\ &\quad + r\cos(\varphi)(1 - \kappa(s)\cos(\varphi))\,\underline{v}(s) \times \underline{b}(s) - r^2\tau(s)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,\underline{n}(s) \times \underline{b}(s) \\ &= -r(1 - r\kappa(s)\cos(\varphi))(\cos(\varphi)\,\underline{n}(s) + \sin(\varphi)\,\underline{b}(s)).\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt dass $\underline{v}(s) \times \underline{n}(s) = \underline{b}(s)$ und $\underline{v}(s) \times \underline{b}(s) = -\,\underline{n}(s)$. Normalisieren wir dieses Vektorfeld denn kriegen wir N.

Aufgabe 3. (6+4+5 Punkte)

Eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ ist eine Helix, falls die Tangenten $\dot{\alpha}(s)$ an die Kurve einen konstanten Winkel mit einem festen Einheitsvektor einschließen, d.h. es gibt $V \in \mathbb{R}^3$, sodass $\langle \dot{\alpha}(s), V \rangle = \cos(\theta) \neq 0$ für einen festen θ.

a) Sei α eine Helix mit nicht verschwindender Krümmung und Torsion, und sei $\{v, n, b\}$ das begleitende Dreibein. Zeigen Sie, dass $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \tan(\theta)$.

   (*Hinweis :* Berechnen Sie $\langle \dot{n}, V \rangle$, und benutzten Sie die Frenet-Gleichungen.)

b) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $a, b > 0$ und $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zeigen Sie, dass die Kurve $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \int_0^s \sin(\varphi(t))dt \\ \frac{a}{c} \int_0^s \cos(\varphi(t))dt \\ \frac{b}{c} s \end{pmatrix}$$

   eine Helix ist.

c) Nehmen Sie an, dass φ so gewählt ist, dass die Krümmung und Torsion von α nicht verschwinden. Zeigen Sie, dass $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{a}{b}$.

<u>Lösung</u> 3.

a) Wir haben dass $\langle \dot{\alpha}(s), V\rangle = \cos(\theta)$ is konstant. Denn

$$\frac{d}{dt}\langle \dot{\alpha}(s), V\rangle = 0,$$

sodass

$$\langle \underline{n}(s), V\rangle = 0.$$

Wir sehen das $V = \cos(\theta)\underline{v}(s) + \sin(\theta)\underline{b}(S)$, d.h. $\langle \underline{b}(s), V\rangle = \sin(\theta)$. Und differentieren wir weiter

$$0 = \langle \underline{\dot{n}}(s), V)\rangle = -\kappa(s)\langle\, \underline{v}(s), V\rangle + \tau(s)\langle\, \underline{b}(s), V\rangle.$$

Wir sehen das $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \tan(\theta)$.

b)

$$\left\langle \frac{d}{ds}\alpha(s), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a}{c}\sin(\varphi(s)) \\ \frac{a}{c}\cos(\varphi(s)) \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{b}{c} = \cos\theta$$

c) Da $\theta = \arccos(\frac{b}{c})$, und $c^2 = a^2 + b^2$ haben wir dass $\sin\theta = \frac{a}{c}$, sodass

$$\tan\theta = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}.$$

Aufgabe 4. (5+5+5 Punkte)

Seien $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, und die reguläre Fläche

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\} \qquad \text{und} \\ E_t &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = t\}. \end{aligned}$$

Sei I das Intervall $(-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}})$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$ und $p \in S \cap E_t$ gilt, dass $T_pS + T_pE_t = \mathbb{R}^3$.

b) Sei $t \in I$. Geben Sie eine reguläre parametrisierte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ an, sodass $\operatorname{im} \gamma = S \cap E_t$.

c) Sei $t \in I$. Seien N ein Einheitsnormalenfeld auf S und K ein Einheitsnormalenfeld auf E_t. Zeigen Sie, dass $\dot{\gamma}(s)$ parallel zu $N(\gamma(s)) \times K(\gamma(s))$ ist.

Lösung 4.

a) Ein normalenfeld auf E ist gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}.$$

Erinneren Sie sich, dass $T_pE = V^{\perp}$. Falls $z^2 \neq \frac{1}{c}$, sehen wir dass

$$e_1 = \begin{pmatrix} by \\ -ax \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} cxz \\ cyz \\ -ax^2 - by^2 \end{pmatrix}$$

ein basis der Tangentialebene ist. Wir benutzen hier das $z^2 \neq \frac{1}{c}$ sodass nicht beide a und b verschwinden$ax^2+by^2 \neq 0$ und e_1 und e_2 linear abhänig sind. Bemerken Sie sich das die letzte component von e_2 nicht verschwindet. Ein basis der tangentialebene T_pE ist

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerken Sie sich dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{ax^2 + by^2}(e_2 - cxzf_1 - cyzf_2).$$

Wir sehen dass $\mathbb{R}^3 = T_pS + T_pE_t$.

b) Falls $p \in E_t \cap S$ denn

$$z = t \qquad \text{und} \qquad ax^2 + by^2 = 1 - ct^2.$$

Wir sehen dass $E_t \cap S$ eine Ellipse ist. Wir können es parametrisieren durch

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(1-ct^2)}{a}}\cos(s) \\ \sqrt{\frac{(1-ct^2)}{b}}\sin(s) \\ t \end{pmatrix}.$$

Es ist einfach zu kontrolieren, dass diese Kurve regulär ist.

c) Da $\operatorname{im}(\gamma) \subset S \cap E_t$ haben wir dass

$$\langle \dot\gamma(s), N(\gamma(s)) \rangle = \langle \dot\gamma(s), K(\gamma(s) \rangle = 0.$$

Es folgt

$$\dot\gamma(s) \times (N(\gamma(s) \times K(\gamma(s)) = N(\gamma(s))\langle(\dot\gamma(s), K(\gamma(s))\rangle - K(\gamma(s))\langle\dot\gamma(s), N(\gamma(s))\rangle = 0.$$

So $\dot\gamma(s)$ ist parallel zu $N(\gamma(s)) \times K(\gamma(s))$.