Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
11.06.2018

Topologie: Übungsblatt 9

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 18.06.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume, und $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(X \times Y; (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X; x_0) \times \pi_1(Y; y_0)$$

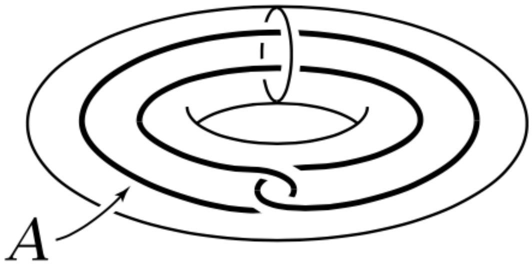
Aufgabe 2. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Toruses $S^1 \times S^1$.
b) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
c) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) : y = z = 0\}$

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Zeigen Sie dass, in folgenden Fällen, A kein Retrakt von X ist :

a) $X = \mathbb{R}^3$ und $A \subset X$ homöomorph zu S^1.
b) $X = S^1 \times D^2$ (wobei D^2 die zweidimensionale Kreisscheibe ist) und $A = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in S^1 \times D^2 : x_2^2 + y_2^2 = 1\}$
c) $X = S^1 \times D^2$ und A der Kreis im Bild gezeigt :



Aufgabe 4. (10 Punkte)

Seien $A_1, A_2, A_3 \subset S^2$ drei abgeschlossene Teilmengen mit $\cup_{i=1}^3 A_i = S^2$. Beweisen Sie, dass es eine Menge A_i gibt, die ein Paar von antipodalen Punkten $\{x, -x\}$ enthält.
Hinweis : Definieren Sie die folgenden Abbildungen

$$\begin{aligned} d_i : S^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf_{y \in A_i} |x - y|_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

und benutzen Sie den Satz von Borskuk-Ulam.