LINEARE ALGEBRA I

Prof. Dr. Silvia Sabatini

WINTERSEMESTER 2016/17 - Universität zu Köln

October 25, 2016

Warnung!

Es handelt sich hier um *Notizen*: Es wird keine Garantie gegeben für die grammatikalische oder mathematische Korrektheit des Textes. Die Anwendung dieser Notizen erfolgt auf einige Gefahr.

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Vorlesung 1 - 20.10.2016

1.1 Organisation

Vorlesung: Montag - Donnerstag 8-9:30 Uhr, im Hörsaal B (Hörsaalgebäude)

Informationen und Hausarbeiten:
`www.mi.uni-koeln.de/~sabatini` → Lehre → Lineare Algebra.

Sprechstunde während der Vorlesungszeit: montags 16 - 17.00 Uhr im Büro 0.08 des Mathematisches Institut (Weyertal 86-90).

Zuständiger Assistent: Dr. Thomas Rot (thomas.rot@uni-koeln.de).
Sprechstunde: Di 16-17.30 Uhr.

Literaturliste:
G. Fischer, *Lineare Algebra*
K. Jänich, *Lineare Algebra*
S. Waldmann, *Lineare Algebra I*

Notation: Im Folgenden benutzten wir die folgenden Mengen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der *natürlichen Zahlen* (positive ganze Zahlen);
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen;
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: die Menge der *genzen Zahlen*;
$\mathbb{Q}$: die Menge der *rationalen Zahlen* (oder Bruchzahlen);
$\mathbb{R}$: die Menge der *reellen Zahlen*, die in Analysis I definiert werden.

1.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir beginnen unsere Vorlesung mit *Gleichungssystemen*, nämlich Systeme von Gleichungen für mehrere *Unbekannte*. Diese bezeichnet man z.B. mit $x_1, x_2, \cdots x_n$ oder x, y, z (wenn $n \leq 3$).

Beispiel 1.2.1
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

Wir sollten eine *Lösung* dieses Gleichungssystems finden, nämlich *alle Paare reeller Zahlen* (x, y), sodass *beide* Gleichungen oben erfüllt sind.
Um das System zu lösen, könnten wir die *Methode der Substitution* benutzen. Wir erklären diese Methode im obigen Beispiel. Von der zweiten Gleichung erhalten wir $y = -1 + 2x$. Also sollte das y in der ersten Gleichung gleich $-1 + 2x$ sein, und wir erhalten $-x^2 + (-1 + 2x) = 0$, oder äquivalent gesagt, $-(x - 1)^2 = 0$. Deshalb ist $x = 1$ und $y = 1$, und die Lösung ist $(x, y) = (1, 1)$. In der Tat, für $(x, y) = (1, 1)$ sind die obigen Gleichungen *Identitäten*:

$$\begin{cases} -1^2 + 1 = 0 \\ -2 * 1 + 1 = -1 \end{cases}$$

Im Allgemeinen können wir uns die folgenden Fragen stellen:
Gegeben sei ein Gleichungssystem:

1) Hat es Lösungen?

2) Wenn Ja, hat es mehrere Lösungen?

3) Können wir *alle* Lösungen beschreiben?

Gleichungssysteme können im Allgemeinen sehr schwer oder unmöglich zu lösen sein! Aber wir können die obigen Fragen für *Lineare* Gleichungssysteme beantworten.

Definition 1.2.1 • Ein *lineares Gleichungssystem* mit n Unbekannten und m Gleichungen ist ein Gleichungssystem der folgenden Gestalt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.2.1}$$

wobei a_{ij} und b_i sind bekannte reelle Zahlen ($a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$) für alle $1 \leq i \leq m$, und $1 \leq j \leq n$, und $x_1, \ldots, x_n$ die n Unbekannte.

- Eine *Lösung* dieses Systems ist ein geordnetes n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ von reellen Zahlen, das alle m Gleichungen erfüllt.
- Ein lineares Gleichungssystem heißt *homogen*, wenn $b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Bemerkung 1.2.1 • Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer die sogenannte "*triviale Lösung*"

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Ist das lineare Gleichungssystem homogen, dann ist ($\Longrightarrow$) $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ eine Lösung.

- Umgekehrt, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ eine Lösung von einem linearen Gleichungssystem ist, dann ($\Longrightarrow$) ist das System homogen.
  Wir können schließen, dass

Ein lineares Gleichungssystem ist homogen $\Longleftrightarrow$ $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ ist eine Lösung.

Ein lineares Gleichungssystem (nicht zwingend homogen) kann: 1) keine Lösung, 2) genau eine Lösung, 3) unendlich viele Lösungen haben. Wir betrachten die folgenden Beispiele:

Beispiel 1.2.2 1) Das System

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

hat keine Lösung (es gibt kein Paar (x, y), sodass *die beiden* Gleichungen erfüllt sind).

2) Das System

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

hat genau eine Lösung, nämlich $(x, y) = (1/2, 1/4)$ (Methode der Substitution).

3) Das System

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

hat unendlich viele Lösungen. In der Tat ist jedes Paar, (x, y), das die erste Gleichung erfüllt, eine Lösung der zweiten Gleichung. Also können wir die zweite Gleichung auslassen und lösen nur die Gleichung $x + 2y = 1$. Wir schreiben dies als $x = 1 - 2y$ und betrachten y als Parameter $t \in \mathbb{R}$, also $x = 1 - 2t$. Es sollte jetzt klar sein, dass wir unendlich viele Lösungen haben, nämlich alle Paare $(1 - 2t, t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

1.3 Der Gauß-Jordan-Algorithmus

Wenn wir wenige Gleichungen und Unbekannte haben, ist die Methode der Substitution effizient, um die Lösungen zu finden. Aber im Allgemeinen können wir diese Methode nicht benutzen und brauchen eine Vereinfachung des Systems. Zuerst sollten wir lineare Gleichungssysteme einführen, für die es einfacher ist, eine Lösung zu finden (*Zeilenstufenform*). Dann betrachten wir einen Algorithmus, der uns sagt, dass jedes lineare Gleichungssystem entweder keine Lösung hat oder "äquivalent" zu einem System in Zeilenstufenform ist.

1.3.1 Lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform

Definition 1.3.1
Ein lineares Gleichungssystem hat *Zeilenstufenform*, wenn es folgender Gestalt ist:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases} \tag{1.3.1}$$

wobei $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

Insbesondere ist $m \leq n$. Wir analysieren die zwei Fälle: $m = n$ und $m < n$.

(A) Nehmen wir an, dass $m = n$. Dann ist das System folgender Gestalt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2m}x_m = b_2 \\ & \vdots \\ & + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Nach Voraussetzung ist $a_{mm} \neq 0$. Dann gibt die letzte Gleichung in (1.3.2) $x_m = \dfrac{b_m}{a_{mm}}$. In der vorletzten Zeile sind die einzigen Unbekannten x_{m-1} und x_m. Deswegen können wir den gefundenen Wert für x_m substituieren, und den Wert für x_{m-1} finden. In der drittletzten Zeile haben wir nur die Unbekannten x_{m-2}, x_{m-1} und x_m. Dann können wir die gefundenen Werte für x_{m-1} und x_m substituieren und den Wert für x_{m-2} finden. Man kann dieses Verfahren iterieren und findet eine Lösung des Systems (1.3.2).

Bemerkung 1.3.1
Wir sollten bemerken, dass in diesem Fall (nämlich für lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform mit m Unbekannten und m Gleichungen) das System eine Lösung hat und diese Lösung eindeutig ist.

Beispiel 1.3.1
(A) Lösen wir das folgende System:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ \qquad 2y - 5z = 4 \\ \qquad\qquad 3z = 2 \end{cases}$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir $z = \frac{2}{3}$; substituieren wir diesen Wert für z in der zweiten Zeile, also $2y - 5\frac{2}{3} = 4$ dann erhalten wir $y = \frac{11}{3}$. Wir ersetzen die gefundenen Werte für y und z in der ersten Zeile und finden $x = \frac{23}{3}$. Also ist die Lösung des Systems gleich $(\frac{23}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3})$.

(B) Es sei $m < n$. Dann können wir (1.3.1) schreiben als

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - (a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - (a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad + a_{mm}x_m = b_m - (a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n) \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Gegeben seien beliebige reelle Werte $t_{m+1}, \ldots, t_n$ für die Unbekannten $x_{m+1}, \ldots, x_n$ Wir erhalten das folgende Gleichungssystem in Zeilenstufenform mit m Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$ und m Gleichungen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - (a_{1m+1}t_{m+1} + \cdots + a_{1n}t_n) \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - (a_{2m+1}t_{m+1} + \cdots + a_{2n}t_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad + a_{mm}x_m = b_m - (a_{mm+1}t_{m+1} + \cdots + a_{mn}t_n) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Dann kann man das Verfahren in **(A)** benutzen, um eine Lösung des Systems (1.3.4) zu finden. Wir bemerken, dass in diesem Fall die Werte für $x_1, \ldots, x_m$ von

$t_{m+1}, \dots, t_n$ abhängen. Genauer gesagt ist $x_m = \dfrac{b_m - (a_{mm+1}t_{m+1} + \cdots + a_{mn}t_n)}{a_{mm}}$ usw. die Lösung für (1.3.3) der Gestalt

$$(P_1(t_{m+1}, \dots, t_n), P_2(t_{m+1}, \dots, t_n), \dots, P_m(t_{m+1}, \dots, t_n), t_{m+1}, \dots, t_n) \tag{1.3.5}$$

wobei $P_1, \dots, P_m$ ersten Grades Polynome in $t_{m+1}, \dots, t_n$ sind. Weil die Werte der Parameter $t_{m+1}, \dots, t_n$ beliebig sind, das System (1.3.3) unendlich viele Lösungen hat, (1.3.5) die man erhält, wenn man die n-m Parameter $t_{m+1}, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ variiert, sagen wir, dass (1.3.3) ∞^{n-m} Lösungen hat.

Beispiel 1.3.2
(B) Lösen wir das folgende System (mit $m = 2$ Gleichungen und $n = 3$ Unbekannten)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ \phantom{2x - {}} 2y - 5z = 4 \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Wir können z als einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachten, und lösen

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 - t \\ \phantom{2x - {}} 2y = 4 + 5t \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Für jedes feste t, hat das System (1.3.7) zwei Gleichungen und zwei Unbekannte (x und y). Aus der letzten Zeile erhalten wir $y = 2 + \frac{5}{2}t$, und mit der Hilfe der ersten Zeile haben wir $x = \frac{22+13t}{4}$. Also ist die Menge aller ∞^1 Lösungen des Systems (1.3.6) gegeben durch

$$\left\{ \left(\frac{22 + 13t}{4}, 2 + \frac{5}{2}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.3.8}$$

Fragen und Vertiefungen 1.3.1
In der Mathematik ist es immer “gefährlich” eine Auswahl zu treffen, das heißt: wenn wir eine Auswahl getroffen haben, sollten wir immer nachprüfen, dass das, was wir gefunden oder bewiesen haben, unabhängig von unserer Auswahl ist!

In Beispiel 1.3.2 haben wir gesagt: "Wir können z als einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachten", aber das ist eine Auswahl! Ist die Menge aller Lösungen von (1.3.6) unabhängig von dieser Wahl? Wir hätten y als einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ wählen können und lösen

$$\begin{cases} 2x + z = 5 + 3s \\ - 5z = 4 - 2s \end{cases} \tag{1.3.9}$$

Sie können nachprüfen, dass die Menge der Lösungen des Systems (1.3.9) gegeben ist durch

$$\left\{ \left(\frac{13s + 29}{10}, s, \frac{2s - 4}{5} \right), s \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.3.10}$$

Sind die zwei Mengen (1.3.8) und (1.3.10) diesselben?

Vorlesung 2 - 24.10.2016

1.3.2 Beschreibung des Gauß-Jordan-Algorithmus

Wie wir schon gesagt haben, wenn ein lineares Gleichungssystem Lösungen hat, erlaubt uns der Gauß-Jordan-Algorithmus, ein lineares Gleichungssystem mit einem neuen "äquivalenten" linearen Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu wechseln. Zuerst, was ist ein äquivalentes lineares Gleichungssystem?

Definition 1.3.2
Zwei lineare Gleichungssysteme heißen *äquivalent*, wenn wir die beiden Systeme mit folgenden Operationen ineinander überführen können:

(1) Vertauschung von (zwei oder mehr) Zeilen;

(2) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor der <u>ungleich Null</u> ist;

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile von einer anderen.

Wir bezeichnen diese Operationen mit folgender Notation:

(1) Vertauschung von i-Zeile Z_i und j-Zeile Z_j: $Z_i \leftrightarrow Z_j$;

(2) Multiplikation einer Zeile Z mit einem Faktor $\lambda \neq 0$: λZ

(3) Addition des Vielfachen einer Zeile von einer anderen: $Z_i + \lambda Z_j$, mit $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.3.2
Es gibt eine vierte "triviale" Operation: Wenn eine Zeile des Systems der Gestalt ist $0 = 0$ (nämlich gibt es $i \in \{1, \ldots, m\}$ sodass $a_{ij} = 0$ für alle j, und $b_i = 0$), können wir diese Zeile löschen.

Bemerken Sie, dass wenn das System eine Zeile der Gestalt $0 = b_i$ hat, mit $b_i \neq 0$, ist die Menge der Lösungen leer.

Wir sollten etwas sehr wichtiges bemerken: die drei Operationen oben sind *umkehrbar*! Als Folgerung haben wir die folgende:

Proposition 1.3.1
Äquivalente lineare Gleichungssysteme haben dieselbe Menge der Lösungen.

Beweis: Es seien Σ_1 und Σ_2 die Mengen der Lösungen von zwei äquivalenten linearen Gleichungssystemen. Wir müssen beweisen, dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, oder äquivalent gesagt, dass $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(1): Es sollte klar sein, dass die Menge der Lösungen eines linearen Gleichungssystems unabhängig von der Ordnung der Zeilen ist.

(2): Es sei Σ_1 die Menge der Lösungen des Systems

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.3.11}$$

und Σ_2 die Menge der Lösungen des Systems

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ \lambda(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) & = \lambda b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.3.12}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es sei $(y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma_1$, also $a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \cdots + a_{jn}y_n = b_j$ für alle $j = 1, \ldots, m$. Insbesondere ist $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = b_i$ und daher $\lambda(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) = \lambda b_i$. Wir erhalten $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Bis jetzt haben wir nicht benutzt, dass $\lambda \neq 0$. Aber, um zu beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, muss $\lambda \neq 0$ sein! (*) In der Tat, wenn $\lambda \neq 0$ ist, können wir die i-Zeile durch λ dividieren (Operation (2) ist umkehrbar), und erhalten (1.3.11) zurück. Deshalb können wir dasselbe Verfahren wie oben benutzen um zu beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(3): Es sei (1.3.11) das System mit der Menge der Lösungen gegeben durch Σ_1. Jetzt nehmen wir ein neues System (1.3.11)', wobei die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \ldots, Z_m$ dieselben des Systems (1.3.11) sind, und die neue i-Zeile Z_i' gegeben ist durch $Z_i + \lambda Z_j$, d.h.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j,$$

für einen $j \neq i$ (**). Es sei Σ_2 seine Menge der Lösungen. Wenn $(y_1 \ldots, y_n) \in \Sigma_1$, dann ist $a_{h1}y_1 + a_{h2}y_2 + \cdots + a_{hn}y_n = b_h$ für alle $h = 1, \ldots, m$, insbesondere $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = b_i$ und $a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \cdots + a_{jn}y_n = b_j$. Deshalb erhalten wir, dass $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n + \lambda(a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \cdots a_{jn}y_n) = b_i + \lambda b_j$ ist, und $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Um zu beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, benutzen wir die Tatsache, dass die Operation (3) umkehrbar ist. In der Tat, ist $Z_i' - \lambda Z_j$ genau Z_i. Mit demselben Verfahren wie oben können wir beweisen, dass $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$, also $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

□

Fragen und Vertiefungen 1.3.2

(a) Im Teil (2) dieses Beweises haben wir gesagt, dass $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, unabhängig von $\lambda \neq 0$ oder $\lambda = 0$. Aber, um zu beweisen dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, brauchen wir im Allgemeinen, dass $\lambda \neq 0$ (*). Warum?

(a1) Finden Sie zwei Systeme wie in (1.3.11) und (1.3.12) mit $\lambda = 0$, sodass $\Sigma_1 \subsetneq \Sigma_2$.

(a2) Finden Sie zwei Systeme wie in (1.3.11) und (1.3.12) mit $\lambda = 0$, sodass $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Die Beispiele in (a1) und (a2) zeigen uns, dass wenn $\lambda = 0$ ist, wir nicht sagen können, ob $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ist oder nicht. Wir wissen nur, dass $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$.

(3a) Im Teil (3) dieses Beweises haben wir angenommen, dass $j \neq i$ (**). Warum? Es sei $j = i$ im System (1.3.11)' und Σ_2 seine Menge der Lösungen.

Finden Sie die Werte von λ, sodass $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Es sei (1.2.1) ein lineares Gleichungssystem. Der Gauß-Jordan-Algorithmus hat verschiedene Stufen:

1. Wenn das System eine Zeile der Gestalt $0 = b_i$ hat, können wir entweder die Zeile löschen oder das System hat keine Lösung (Bemerkung 1.3.2). Also können wir annehmen, dass es ein i und j gibt, sodass $a_{ij} \neq 0$. Wenn $j > 1$ können wir die Unbekannten x_j und x_1 wechseln und annehmen dass $a_{i1} \neq 0$ ist.

2. Mit Hilfe der Operation (1) können wir annehmen, dass $a_{11} \neq 0$.

3. Wir multiplizieren die erste Zeile durch a_{11}^{-1} (Operation (2)) und erhalten ein äquivalentes System mit $a_{11} = 1$.

4. Wir substituieren die zweite Zeile Z_2 mit $Z_2 - a_{21}Z_1$, die dritte Zeile Z_3 mit $Z_3 - a_{31}Z_1$.... die m-Zeile Z_m mit $Z_m - a_{m1}Z_1$ und erhalten ein äquivalentes System der Gestalt:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}\right. \tag{1.3.13}$$

Wenn das System eine Zeile der Gestalt $0 = 0$ hat, können wir diese Zeile löschen. Wenn wir eine Zeile der Gestalt $0 = b'_i$ haben, mit $b'_i \neq 0$, dann hat das System (1.3.13), und auch das System (1.2.1) keine Lösung.

5. Wenn $m > 1$, gibt es einen $a'_{ij} \neq 0$, mit $i > 1$. Jetzt können wir die erste Zeile so lassen und arbeiten mit den anderen Zeilen. Ähnlich wie in Stufen 1., 2. und 3. können wir mit Hilfe der Operationen (1), (2) ein neues äquivalentes System der folgenden Gestalt erhalten:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & x_2 & + & a''_{23}x_3 & + & \cdots & + & a''_{2n}x_n & = & b''_2 \\ & & & & a''_{33}x_3 & + & \cdots & + & a''_{3n}x_n & = & b''_3 \\ & & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & a''_{s3}x_3 & + & \cdots & + & a''_{sn}x_n & = & b''_s \end{array}\right. \tag{1.3.14}$$

Noch einmal: wenn eine Zeile des Systems (1.3.14) der Gestalt $0 = b''_i$ ist, dann im Fall $b''_i \neq 0$ das System (1.3.14) (und so (1.2.1)) keine Lösung hat, ansonsten können wir die Zeile $0 = 0$ löschen.

Durch Wiederholen dieses Verfahrens, erhalten wir entweder ein System ohne Lösungen, oder ein System in Zeilenstufenform (1.3.4). Dann können wir die Methode wie in Sektion 1.3.1 beschrieben benutzen, um die Menge aller Lösungen zu finden.

Beispiel 1.3.3
Lösen wir das System

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Mit dem obigen Verfahren haben wir

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 3Z_1} \end{array} \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & -3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & -9x_2 & - & 8x_3 & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_2 \to -\frac{1}{3}Z_2}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & & -9x_2 & - & 8x_3 & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 9Z_2} \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & & & & -2x_3 & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{2}Z_3}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Das obige System hat die (eindeutige) Lösung $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$.

Beispiel 1.3.4
Lösen wir das System

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \tag{1.3.15}$$

Mit dem obigen Verfahren haben wir

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{2} Z_1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3} \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Das obige System ist in Zeilenstufenform und hat 4 Unbekannte und 2 Gleichungen. Mithilfe der in Sektion 1.3.1 **(B)** beschriebenen Methode, können wir x_2 und x_4 als Parameter t und s nehmen und das folgende System mit 2 Unbekannten (x_1 und x_3) und zwei Gleichungen lösen:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 - 2t \\ x_3 = 3 - 2s \end{cases} \tag{1.3.16}$$

Sie können nachprüfen, dass die Menge der Lösungen des Systems (1.3.16), und auch des Systems (1.3.15), gegeben ist durch

$$\{(5 - 2t - 2s, t, 3 - 2s, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Also hat das System ∞^2-Lösungen.

Beispiel 1.3.5
Es sei das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Wegen der letzten Zeile hat das System keine Lösung.

Wir schließen dieses Kapitel mit folgender:

Proposition 1.3.2
Es sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.3.17}$$

ein lineares Gleichungssystem. Nehmen wir an, dass die Menge Σ seiner Lösungen nicht leer ist, d.h. es gibt $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, sodass die Gleichungen in (1.3.17) *Identitäten sind.*

Es sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.3.18}$$

das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem mit Menge der Lösungen gegeben durch Σ_0.

Dann ist die Menge Σ der Lösungen des Systems (1.3.17) *gegeben durch*

$$y + \Sigma_0 := \{(y_1, \ldots, y_n) + (x_1^0, \ldots, x_n^0) \mid (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Sigma_0\}.$$

Beweis. Wir sollen beweisen, dass $\Sigma \subseteq y + \Sigma_0$ und $y + \Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

• Es sei $y' = (y'_1, \ldots, y'_n) \in \Sigma$ eine beliebige Lösung des Systems (1.3.17), d.h. $y' \in \Sigma$. Dann haben wir, dass $\sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Weil $y \in \Sigma$, ganz analog haben wir $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Also

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(y'_j - y_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n,$$

und $y' - y = (y'_1 - y_1, \ldots, y'_n - y_n)$ ist eine Lösung des Systems (1.3.18), d.h. $y' - y \in \Sigma_0$. Wir schließen, dass $y' = y + (y' - y) \in y + \Sigma_0$, also $\Sigma \subseteq y + \Sigma_0$.

• Es sei $(y_1, \ldots, y_n) + (x_1^0, \ldots, x_n^0) = (y_1 + x_1^0, \ldots, y_n + x_n^0) \in y + \Sigma_0$. Dann haben wir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(y_j + x_j^0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 = b_i + 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Also, $(y_1, \ldots, y_n) + (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Sigma$ und $y + \Sigma_0 \subseteq \Sigma$. □