

---

## Topologie: Übungsblatt 11

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 2.7.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

### Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei  $g \in \mathbb{N}$ . Sei  $\tilde{\Sigma}_g$  die nicht orientierbare Fläche, die durch Identifikation des Randes eines  $2g$ -gons durch das Wort

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$$

entsteht. Zeigen Sie, dass  $\pi_1(\tilde{\Sigma}_g) \cong \langle A_1, \dots, A_g \mid A_1^2 \cdots A_g^2 \rangle$ .

### Aufgabe 2. (10+10+10+10 Punkte)

Erinnern Sie sich, dass für jedes  $g \geq 1$ ,  $\Sigma_g$  die orientierbare Fläche von Geschlecht  $g$  bezeichnet und  $\tilde{\Sigma}_g$  die nicht orientierbare Fläche von Geschlecht  $g$ . Wir definieren  $\Sigma_0 = S^2$ , die zwei dimensionale Sphäre.

**Satz 1.** Sei  $S$  eine geschlossene Fläche. Dann ist  $S$  homöomorph zu  $\Sigma_g$  oder  $\tilde{\Sigma}_g$  für ein  $g$ . Für jedes  $g, g'$  mit  $g \neq g'$  gilt

$$\Sigma_g \not\cong \Sigma_{g'}, \quad \tilde{\Sigma}_g \not\cong \tilde{\Sigma}_{g'}$$

und für alle  $g, g'$  gilt, dass  $\Sigma_g \not\cong \tilde{\Sigma}_{g'}$ .

In dieser Aufgabe beweisen wir einen Teil dieses Klassifikationssatzes von Flächen, nämlich dass die Flächen  $\Sigma_g$  und  $\tilde{\Sigma}_g$  nicht homöomorph sind.

- Für eine Gruppe  $G$  bezeichne  $G_{\text{ab}} := G/[G, G]$  die Abelisierung. Zeigen Sie, dass wenn  $G \cong H$  gilt, dann auch  $G_{\text{ab}} \cong H_{\text{ab}}$ .
- Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(\Sigma_g)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(\tilde{\Sigma}_g)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*Hinweis : Zeigen Sie, dass in einer abelschen Gruppe die Identität  $a_1^2 \dots a_n^2 = (a_1 \dots a_n)^2$  gilt.*

d) Zeigen Sie, dass für jedes  $g, g'$  mit  $g \neq g'$

$$\Sigma_g \not\cong \Sigma_{g'}, \quad \tilde{\Sigma}_g \not\cong \tilde{\Sigma}_{g'}$$

gilt und für alle  $g, g'$  gilt, dass  $\Sigma_g \not\cong \tilde{\Sigma}_{g'}$ .