Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
6.12.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 9

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 13.12.17 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Eine Drehfläche (oder Rotationsfläche) S entsteht, indem man eine ebene Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$, die, sagen wir, in der xz-Ebene liegt (d.h. $c(t) = (c_1(t), 0, c_3(t))$), um die z-Achse rotiert. Man kann beweisen (aber das tun wir hier nicht), dass falls die Kurve regulär ist und ein lokaler Diffeomorphismus auf ihr Bild ist und die z-Achse nicht schneidet, die Fläche S regulär ist. Wir nehmen an, dass die Kurve c diese Eigenschaften hat.

a) Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Differential von $F : I \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ gegeben durch
$$F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} c_1(t)\cos(\varphi) \\ c_1(t)\sin(\varphi) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$$
Rang 2 hat.

b) Berechnen Sie die Tangentialebene durch $F(t,\varphi) \in S$.

c) Berechnen Sie die erste Fundamentalform in dieser lokalen Parametrisierung.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei $0 < r < R$. Der Torus $\mathbb{T}$ ist die Drehfläche die durch Rotation der Kurve
$$c(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) + R \\ 0 \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$
um die z-Achse entsteht.

a) Skizzieren Sie den Torus und zeichnen Sie die Parameter r und R in Ihrer Skizze ein.

b) Berechnen Sie die erste Fundementalform in der lokalen Parameterisierung aus Aufgabe 1.

c) Sei $p \in \mathbb{T}$. Berechnen Sie alle Punkte $q \in \mathbb{T}$, sodass $T_p\mathbb{T} = T_q\mathbb{T}$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Kurve $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$. Sei S die Drehfläche, die durch Rotation der Kurve c um die z-Achse entsteht.

a) Zeigen Sie, dass S keine reguläre Fläche ist.

b) Finden Sie einen Punkt $p \in S$, sodass $S \setminus \{p\}$ eine reguläre Fläche ist.

c) Beweisen Sie, dass $S \setminus \{p\}$ eine reguläre Fläche ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Bezeichnen Sie mit

$$P_N \colon S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$P_S \colon S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die stereographischen Projektionen bezüglich des Nordpols N oder des Südpols S.
P_N^{-1} und P_S^{-1} kann man als Parametrisierungen der 2-Sphäre auffassen.

(a) Berechnen Sie die Kartenwechselabbildungen $P_N \circ P_S^{-1}$, $P_S \circ P_N^{-1}$ und deren Differentiale.

(b) Bestimmen Sie das Vorzeichen der Determinante dieser Differentiale.

(c) Ist die 2-Sphäre orientierbar?

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück. Betrachten Sie eine Abbildung $N \colon F \to \mathbb{R}^3$, so dass

- $N(p)$ immer Länge 1 hat und
- $N(p)$ immer senkrecht auf T_pF steht.

Zeigen Sie, dass N stetig ist genau dann, wenn N differenzierbar ist.