Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
23.4.2018

Topologie: Übungsblatt 3

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 30.4.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $X = \{a, b, c, d\}$ und definieren Sie die folgende Topologie auf X

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Finden Sie,

(i) das Innere von $\{a, b, d\}$
(ii) der Abschluss von $\{a\}$
(iii) der Rand von $\{a\}$
(iv) alle stetige Abbildungen $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ mit $f(d) = d$
(iv) alle abgeschlossene Abbildungen $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ mit $f(b) = c$, $f(c) = b$.

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume, und

$$\pi_X : (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) \to (X, \mathcal{T}) \quad \pi_Y : (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) \to (Y, \mathcal{T}')$$

die Projektionsabbildungen, wobei $\mathcal{T}_{X\times Y}$ die Produkttopologie ist.

(i) Beweisen Sie, dass die Abbildungen π_X und π_Y offen sind.
(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{X\times Y}$ die gröbste Topologie ist, so dass die Projektionsabbildungen π_X und π_Y stetig sind.
(iii) Sei $\mathcal{E}_n$ die Euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Nehmen Sie an, dass $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{T}') = (\mathbb{R}, \mathcal{E}_1)$. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} : (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) &\to (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_2) \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $S \subset X$ eine Teilmenge.

(i) Zeigen Sie, dass der Abschluss von S, bezeichnet mit $\overline{S}$, genau $X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} S)$ ist, wobei

$$(X \overset{\circ}{\setminus} S)$$

das Innere von $X \setminus S$ bezeichnet.

(ii) Es sei $S \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass die folgende Bedingungen äquivalent sind :

a) $\overline{S} = X$.

b) $(X \overset{\circ}{\setminus} S) = \emptyset$.

c) $S \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{T}$.

d) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$, so dass $S \cap B \neq \emptyset$, für alle $B \in \mathcal{B}$.

Eine solche Teilmenge S, die die (äquivalenten) Bedingungen a) – d) erfüllt, heißt *dichte Menge* in $(X, \mathcal{T})$.

(iii) Beweisen Sie, dass $\partial(\mathring{S}) \subset \partial(S)$. Finden Sie ein Beispiel, so dass $\partial(\mathring{S}) \subsetneq \partial(S)$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Es seien $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ und $S := \left\{\frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$. Beweisen Sie, dass

a) $\overline{S} = S \cup \{1\}$, falls $\mathcal{T} = \mathcal{E}$ die euklidische Topologie und

b) $\overline{S} = \mathbb{R}$, falls $\mathcal{T}$ die koendliche Topologie ist.