
Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 4

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 8.11.17 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und **groß und fett Ihre Übungsgruppe** auf die **erste Seite** Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind **nicht** möglich.

Aufgabe 1. (20 Punkte)

Der Krümmungsmittelpunkt $M(t_0)$ ist das Zentrum des Kreises der die Kurve u im Punkt $u(t_0)$ am besten approximiert. Die Menge der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve u nennt man die Evolute von u . Von dem letzten Übungsblatt kennen wir die Formel

$$M(t_0) = u(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} J \left(\frac{\dot{u}(t_0)}{\|\dot{u}(t_0)\|} \right), \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

für den Krümmungsmittelpunkt.

- a) Finden Sie eine Parameterisierung der Evolute der Parabel

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Evolute der Parabel P gegeben ist durch

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(y - \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{27}{16} x^2 \right\}.$$

Aufgabe 2. (30 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Fermats Spirale F ist gegeben durch

$$F = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho^2 = a\theta, \quad \text{mit} \quad \rho, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Skizzieren Sie Fermats Spirale.
- b) Finden Sie zwei reguläre parametrisierte Kurven $\alpha, \beta : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass

$$F \setminus \{0\} = \alpha(\mathbb{R}_{>0}) \cup \beta(\mathbb{R}_{>0}).$$

- c) Berechnen Sie die Krümmungen κ_α und κ_β der Kurven α und β .
- d) Zeigen Sie, dass die Krümmungen $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$ Maxima haben und berechnen Sie die Punkte, an denen diese Maxima angenommen werden.
- e) Geben Sie eine reguläre glatte Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Spirale Fermats an und zeigen Sie, dass die Parametrisierung die gewünschten Eigenschaften hat.