Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
02.12.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 7

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 09.12.15 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (30 Punkte)

Seien $S^2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ die Sphäre und $N = (0,0,1)^T$ der Nordpol.

a) Sei $L_{(x,y)}$ die Gerade durch $(x,y,0)^T$ und N. Zeigen Sie, dass $L_{(x,y)} \cap (S^2 \setminus N)$ genau einen Punkt enthält. Nennen Sie diesen Punkt $F(x,y)$.

Teil a) zeigt, dass F eine wohldefinierte Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist.

b) Geben Sie eine Formel für F an.

c) Sei $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{N\}$. Zeigen Sie, dass $F(\mathbb{R}^2) = S^2 \cap V = S^2 \setminus \{N\}$ und dass $F : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ eine Bijektion ist.

d) Geben Sie eine Formel für $F^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ an, und zeigen Sie, dass F ein Homöomorphismus ist.

e) Zeigen Sie, dass $D_{(x,y)}F$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ Rang 2 hat.

f) Argumentieren Sie, dass desselbe gilt für $S^2 \setminus S$, wobei $S = (0,0,-1)^T$ der Südpol ist, und dass S^2 eine reguläre Fläche ist.

Aufgabe 2. (20 Punkte)

Sei $G : (-\pi, \pi) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$G(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie für (x,y,z) im Bild von G die Koordinaten θ und φ.

b) Berechnen Sie das Bild von G.

c) Zeigen Sie, dass G ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

d) Zeigen Sie, dass $D_{(\theta,\varphi)}G$ Rang 2 hat.