Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
27.1.2016

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 12

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 03.02.16 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Dieses Übungsblatt ist die letzte des Kursus.

Aufgabe 1. (30 Punkte)

Sei S die Sphäre

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

a) Berechnen Sie den Krümmungstensor in der lokalen Parametrisierung $\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\sin(\alpha) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Es ist erlaubt die Berechnungen der Christoffel-Symbole aus der Vorlesung zu benutzen.

b) Seien $v := \frac{\partial\varphi(\theta,\alpha)}{\partial\theta}$ und $w := \frac{\partial\varphi(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}$. Kontrolieren Sie, dass

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v).$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Seien S eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $v, w \in T_pS$ eine (nicht notwendig orthonormale) Basis der Tangentialebene T_pS. Zeigen Sie, dass

$$K(p) = \frac{I(R_p(v, w)w, v)}{I(v, v)I(w, w) - I(v, w)^2}.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei R^l_{ijk} der riemannsche Krümmungstensor in einer lokalen Parametrisierung einer regulären Fläche. Definieren Sie

$$R_{mijk} := \sum_{l=1}^{2} g_{ml} R^l_{ijk}.$$

Zeigen Sie, dass

$$R_{mijk} + R_{mjki} + R_{mkij} = 0.$$