Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro

Universität zu Köln
09.11.2020

ANALYSIS I
Übungsblatt 2

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 16.11.2020, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. (i) Beweisen Sie rigoros und direkt (also, ohne Induktion) Satz 1.4.6 (Seite 46 der Notizen. Sie müssen insbesondere alle "Warum?" in den Notizen erklären, und die Argumentation verallgemeinern).

(ii) Beweisen Sie Satz 1.4.6 mit der Hilfe des Induktionsbeweises.

(iii) Finden und beweisen Sie eine Formel für $(x_1 + \cdots + x_h)^n$, für alle $h, n \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe 2. (a) Beweisen Sie durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.

Bemerkung: Die Induktion hilft uns nicht die obige Formel zu finden. Wir können nur beweisen, dass die Formel für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

In den folgenden Aufgaben beschreiben wir einen Ansatz, um die Formel aus der sogenannten Teleskopsumme abzuleiten.

(b) Gegeben sei eine endliche Folge $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, wir definieren ihre *Teleskopsumme* durch

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \, .$$

Beweisen Sei durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

gilt.

(c) Sei $a_k = k^3$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

gilt, und schließen Sie daraus, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt .

Hausaufgabe 1. (10=3+1+4+2 Punkte) Vergessen wir für einen Moment die Definition des Binomials $\binom{n}{k}$, die wir in Definition 1.4.4 gegeben haben, und *definieren* das Symbol $\binom{n}{k}$ als die Anzahl der Teilmengen von X der Mächtigkeit k, wobei $|X| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. (Glücklicherweise macht diese neue Definition dank des Theorems 1.4.5 Sinn). Mit dieser neuen Definition (und nicht mit der expliziten Formel für das Binomial!!) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften: Es seien $k, n \in \mathbb{N}$, dann

(i) für alle $k \leq n$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(ii) $\displaystyle\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$;

(iii) für $k \geq 1$ ist $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Hausaufgabe 2. (9=5+4 Punkte) Es seien n Geraden in $\mathbb{R}^2$ gegeben, so dass je zwei dieser Geraden nicht parallel sind und so dass es keinen Punkt in $\mathbb{R}^2$ gibt, der auf mehr als zwei dieser Geraden liegt. Diese Geraden teilen $\mathbb{R}^2$ in verschiedene Teile (siehe Abbildung 1).

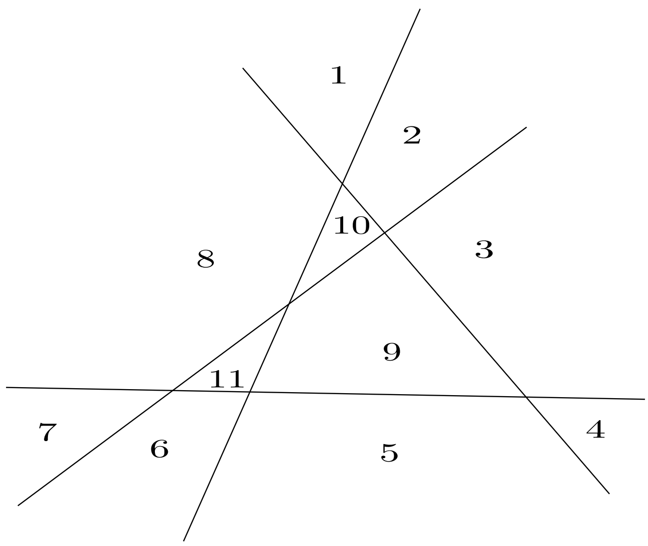

Abbildung 1: Vier Geraden teilen $\mathbb{R}^2$ in elf Teile .

Es sei $p(n)$ die Anzahl dieser Teile. Zeigen Sie, dass

- $p(n+1) = p(n) + (n+1)$,
- $p(n) = \dfrac{(n^2+n+2)}{2}$
  gilt.

Hausaufgabe 3. (6=1+1+1+1+1+1 Punkte)
(Lemma 2.1.3 auf den Notizen)
Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten, für beliebige $a, b, c \in K$:

3. Falls $a > 0$ und $b > 0$, dann sind $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$
4. Falls $a > b$ und $c > d$, dann ist $a + c > b + d$
5. Falls $a > b > 0$ und $c > d > 0$, dann ist $a \cdot c > b \cdot d$
7. Falls $a \neq 0$, dann ist $a^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$
8. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in K
10. Falls $a > b > 0$, dann ist $b^{-1} > a^{-1}$

Extra Hausaufgabe 1. (+10=1+3+3+3 Punkte) In dieser Übung werden wir Frage 5 (c) auf Seite 39 beantworten.
Wir definieren zuerst das folgende Konzept: Die **Stirling-Zahl zweiter Art** $S(n, k)$ gibt die Anzahl der Partitionen mit k Elementen einer Menge mit n Elementen.[1] Falls $X = \{a, b, c\}$, dann ist $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ eine Partition von X mit zwei Elementen, und $S(3, 2)$ ist drei, weil die Partitionen von X mit zwei Elementen sind

$$\{\{a\}, \{b, c\}\}, \quad \{\{b\}, \{a, c\}\}, \quad \{\{c\}, \{a, b\}\}.$$

(Bemerken Sie, dass $S(n, k)$ unabhängig ist, von der gewählten Menge X mit n Elementen...d.h., $S(n, k)$ hängt nur von n und k ab.)
Im Folgenden nehmen wir an, dass $k, n \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $n > 0$.
Beweisen Sie direkt (also, ohne Induktion), dass

(a) $S(n, k) = 0$ falls $k > n$, und $S(n, n) = S(n, 1) = 1$;

(b) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$;

(c) $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$;

(d) ...und endlich... die Anzahl aller surjektiven Funktionen $f\colon X \to Y$, wobei $|X| = n$ und $|Y| = k$, gegeben ist durch $k!\, S(n, k)$.

Extra Hausaufgabe 2. (+10=5+5 Punkte) Es sei $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine Gruppe mit Operation $\cdot$ und neutralem Element e. Betrachten Sie die folgende Tabelle:

$\cdot$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d		
b	b					
c	c			e		a
d	d					
f	f					

[1] Es gibt eine direkte Formel, um diese Zahlen zu berechnen, aber wir werden sie nicht einführen, da sie kompliziert ist und nicht zum Verständnis ihrer Eigenschaften beiträgt.

Diese Tabelle gibt einen Teil der Operation $\cdot : G \times G \to G$ an (die nicht notwendig kommutativ ist!). Zum Beispiel, sehen wir an der Tabelle, dass $a \cdot c = d$ und $c \cdot f = a$.

(i) Berechnen Sie die Produkte $c \cdot a$, $b \cdot b$ und $d \cdot f$. Erklären Sie Ihre Berechnung!

(ii) Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.