Vorlesung 3

1.3.5 Induktionsprinzip

1.4 Etwas Kombinatorik

1.5.1 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

→ bis zum Definition „Gruppe"

Vom letzten Mal ... **Peanos Axiome:**

Definition 1.3.3
Es sei $\mathbf{N}$ eine nicht leere Menge, $0_{\mathbf{N}}$ ein Symbol und $N \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ eine Funktion. Das Tripel $(\mathbf{N}, 0_{\mathbf{N}}, N)$ ist ein *Modell natürlicher Zahlen*, wenn es die folgenden Axiome verifiziert:

(P1) $0_{\mathbf{N}} \in \mathbf{N}$;

(P2) Für jedes Element $n \in \mathbf{N}$, es ein eindeutiges Element $N(n)$ existiert, das noch in $\mathbf{N}$ liegt (Existenz der "Nachfolgendenabbildung" $N \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$);

(P3) Es gibt kein $n \in \mathbf{N}$, so dass $N(n) = 0_{\mathbf{N}}$ (die Nachfolgendeabbildung ist nicht surjektiv, da $0_{\mathbf{N}} \notin N(\mathbf{N})$, und $0_{\mathbf{N}}$ ist keine Nachfolgende Zahl);

(P4) Falls $N(n) = N(m)$, dann $n = m$, für alle $n, m \in \mathbf{N}$ (die Nachfolgendeabbildung ist injektiv);

(P5) Es sei A eine Teilmenge von $\mathbf{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \in A$, und

(ii) Für alle $n \in \mathbf{N}$, $n \in A \implies N(n) \in A$. ($A$: induktiv)

Dann ist $A = \mathbf{N}$.

Bedeutung von (P5):

$\mathbb{R}$ $\qquad \mathbf{N} =: \mathbb{R}_{\geq 0} = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$

$N : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$x \longmapsto x + 1$

↳ Nachfolgendeabbildung

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$A = \mathbb{N}$

$A = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Prop.: $(\mathbb{N}, 0, N)$ ist ein Modell natürlicher Zahlen $\quad 0 = |\emptyset|,\ 1 = |\{\emptyset\}| \ldots$

((P5) $\Leftarrow$ $\leq$ eine Wohlordnung ist)

Heute: Induktionsprinzip 1.3.5.

$(\mathbb{N}, 0, N)$ Modell

(P5): $A \subseteq \mathbb{N}$, sodass

(i) $0 \in A$, und

(ii) jedes Mal $n \in A \Rightarrow \overset{N(n)}{\overset{\parallel}{n+1}} \in A$

dann muss gelten: $A = \mathbb{N}$

$\Uparrow$ $\quad P(n)$: "$n \in A$"

Induktionsprinzip: $P(n)$ Prädikat

Falls: $\begin{cases} \text{(i)}' & P(0) \text{ wahr ist} \\ \text{(ii)}' & P(n) \text{ wahr} \Rightarrow P(n+1) \text{ wahr} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

dann muss gelten: $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

(P5) $\Rightarrow$ Induktionsprinzip

Äquivalent $\quad A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ wahr}\}$ $\quad$ ((i)' $\Rightarrow$ (i), (ii)' $\Rightarrow$ (ii))

Ab heute: $(\mathbb{N}, 0, N) = (\mathbb{N}, 0, N)$

- **Induktionsbeweis**: $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$

Zu beweisen: $P(n)$ wahr, $\forall n \in \mathbb{N}$

(1) $P(0)$ wahr (Induktionsanfang)

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ (Induktionsschritt)

$P(n)$ wahr $\Rightarrow$ $P(n+1)$ wahr ist

Induktionsprinzip $\Rightarrow$ $P(n)$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$!

Übung: $P(n_0)$ gilt und 2) gilt $\forall n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$

- **(Starkes Induktionsprinzip)**

Falls

(1)' $P(n_0)$ wahr ist, und ←

(2)' $\forall n$, $P(n_0), P(n_0+1), \ldots P(n)$ wahr ←

$\Rightarrow P(n+1)$ wahr

$\Rightarrow P(n)$ gilt $\forall n \geq n_0$

Beispiele (Induktionsbeweis)

1) **Summe der ersten (n+1) Folgenglieder einer arithmetischen Folge**

$$\underset{a(n)}{a_n} = \underset{a(n-1)}{a_{n-1}} + d$$

Folge
$a: \mathbb{N} \to A$ $\quad \mathbb{Q}$
$a(n) =: a_n$ $\quad \mathbb{R}$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = a_{n-3} + 3d = \dots = a_0 + nd$$

- $a_0 + a_1 + \dots + a_n = ?$

$$\rightarrow a_0 + \underbrace{(a_0 + d)}_{a_1} + \underbrace{(a_0 + 2d)}_{a_2} + \dots + \underbrace{a_0 + nd}_{a_n}$$

$$\rightarrow (a_0 + nd) + (a_0 + (n-1)d) + \dots + a_0$$

$$\frac{(2a_0 + nd) \cdot (n+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd)$$

$$S(n) := \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd)$$

$$S(n) \overset{!}{=} \frac{(n+1)(2a_0+nd)}{2}$$

(1) Induktionsanfang

$$S(0) = a_0 \qquad 1 \cdot \frac{(2a_0)}{2} = a_0$$

$$P(n): \text{"} S(n) = \frac{(n+1)(2a_0+nd)}{2} \text{"}$$

P(0) wahr ✓

(2) P(n) wahr ist

$$S(n) = \frac{(n+1)(2a_0+nd)}{2}$$

$$S(n+1) = S(n) + a_{n+1} = S(n) + (a_0 + (n+1)d)$$

$$= \frac{(n+1)(2a_0+nd)}{2} + (a_0 + (n+1)d)$$

Induktionshypothese P(n) gilt

$$= \dots = \frac{(n+2)(2a_0+(n+1)d)}{2}$$

2) Summe der ersten $(n+1)$ Folgenglieder einer geometrischen Folge

$$1,\ q^1,\ q^2,\ \dots,\ q^n \quad ,\ q \in \mathbb{R},\ q \neq 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad a_0 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = ?$$

$$S(n) := \sum_{i=0}^{n} q^i$$

$$q(1+q+\dots+q^n) = q+q^2+\dots+q^{n+1} = S(n+1)-1$$

$$S(n+1) = S(n) + q^{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$S(n+1) = q\,S(n) + 1$$

$$q\,S(n) + 1 = S(n) + q^{n+1} \quad *$$

Bmk: $q = 1 \qquad q^k = 1 \Rightarrow S(n) = n+1$

Angenommen $q \neq 1$

$$* \quad S(n)(1-q) = 1-q^{n+1} \Rightarrow S(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S(n) \overset{!}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad P(n): \text{"} S(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{"}$$

Induktion

(1) $S(0) = 1$ $\qquad \dfrac{1-q}{1-q} = 1$ ✓

(2) $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

$$S(n+1) = S(n) + q^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionshypothese,} \\ P(n) \text{ gilt}}}{=\!=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \ldots = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

3) Ein "Gegenbeispiel"...

$P(n)$: "n (beliebige) Studierende der Analysis I haben die gleiche Augenfarbe"

$n \geq 1$

(Starkes Induktionsprinzip)

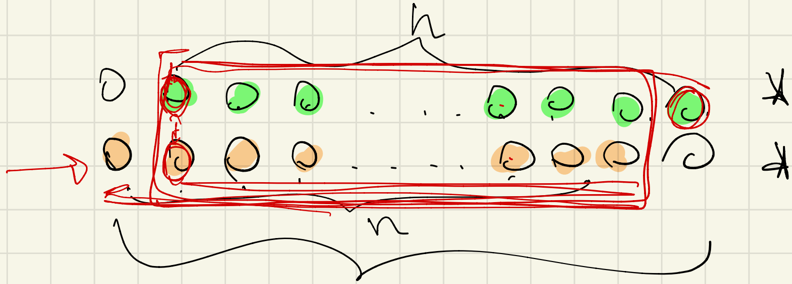
$$\Big(\underset{\text{gilt}}{P(n)} \Longrightarrow P(n+1)\Big)$$

Starkes Induktionsprinzip

(1) $P(1)$ gilt

(2) $P(1), P(2), \dots, P(n)$ gelten $\overset{?}{\Longrightarrow} P(n+1)$

$$\circ \; \circ \; \circ \; \dots \; \circ \circ \circ$$



$n+1$ Studierende

$P(1), \ldots P(n)$

$$\left.\begin{array}{l} P(n-1) \ \checkmark \\ P(n) \ \checkmark \end{array}\right\} \rightarrow P(n+1)$$

1.4: Etwas Kombinatorik

Fragen:

1) X Menge, $|X| = n \in \mathbb{N}$

- Wie viele Teilmengen mit k Elementen gibt?

- $|\mathcal{P}(X)| = ?$

2) Gegeben X, Y, $|X| = n$ und $|Y| = k$
$n, k \in \mathbb{N}$

- wie viele

a) Funkt. $f: X \to Y$ gibt es?

b) injektive " " " ?

c) surjektive " " " ? ☺

d) bijektive " " " " ?

Permutation : X mit n Elemente

Anordnung der Elemente in einer bestimmten Reihenfolge

Beispiel: $X = \{a, b, c\}$

abc, acb, bac, bca, cab, cba

6

a _ _
abc
acb

b _ _
bac
bca

c _ _
cab
cba

$3 * 2 * 1$

Fakultät: $n!$

$$0! := 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 0!$$

[Induktiv $0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$]

$1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$, $4 \to 5$, $\vdots$, n

$(2\ 1\ 3\ 5 \ldots)$

Satz: Die Permutationen von n verschiedenen Objekten sind

$$n!$$

$$n \cdot (n-1)!$$

$\mathbf{1}$

$X = \{\underbrace{1, 2, 3, \ldots, n}\}$

Frage: Wie viele bijektive Funktionen

Übung 1.4.2. $f: X \to X$, $|X| = n$?

$$X \longleftrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

$n!$

1
2
3
$\vdots$
n

Variation ohne Wiederholung von n Objekten zur Klasse k:

Anordnung von k Elementen in X, $|X| = n$, in einer bestimmten Reihenfolge.

- Beispiel: $n = 4$, $k = 2$

  $X = \{1, 2, 3, 4\}$

12 13 14 23 24 34

$$\underbrace{\underline{1}\ \underline{2}\ \_\ \dots\ \_}_{k} \quad \rightarrow X = \{1, 2, \dots, n\}$$

$\underline{n}$ Möglichkeiten | $\underline{n-1}$ $(n-2)$ $(n-(k-1))$

$$\underbrace{n(n-1)(n-2) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)}$$

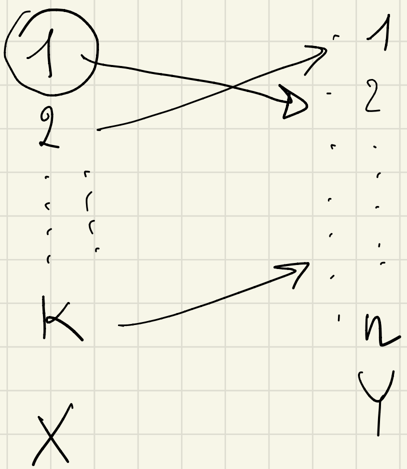
Satz : $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n Objekten zur Klasse k ist

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}}.$$

- Übung 1.4.3 : $f: X \to Y$, $|X| = k$. $|Y| = n$.

  - Wie viele f injektiv gibt ?



$(2 \; 1 \; \ldots\ldots \; k-1)$

Permutationen mit Wiederholung

a a a b b

a a a b b

a a b a b

a a b b a

⋮

$a_1\ a_2\ a_3\ b_1\ b_2$

$a_2\ a_1\ a_3\ b_1\ b_2$

⋮

$a_3\ a_2\ a_1\ b_1\ b_2$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 10$$

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$a\,a\,a\,b_1 b_2 \quad a\,a\,a\,b_2 b_1$

Satz: $x_1, x_2, \dots x_k$ verschiedene Elemente

x_1 : wird n_1- mal wiederholt

x_2 : " n_2- " "

$\vdots$

x_k " n_k- " "

$\boxed{n := n_1 + \dots + n_k}$.

$\rightarrow$ Anzahl Permutationen mit Wiederholung

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} =: \binom{n}{n_1, \dots, n_k}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

n über k

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, \underline{n-k}}$$

Satz (1.4.5) X Menge $|X| = n$

1) Anzahl Teilmengen mit k Elementen ist $\binom{n}{k}$.

2) Anzahl der Potenzmenge von X ist

$$2^n$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$Y : |Y| = 3$ $\quad \{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 5\}$

● ● ● ○ ○ $\qquad$ ○ ● ○ ● ●

○ → $(n-k)$-mal

● → k-mal

$k = |Y|$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$$

Übung 1.4.8 ... $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \ldots$

Satz 1.4.6 : Binomischer Lehrsatz

Als Polynome in a, b :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Übung 1.4.8

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\rightarrow \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$\binom{n}{k}$ = # Teilmengen mit k Elementen einer Menge mit n Elem.

$$A \rightarrow A^C$$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Wir suchen eine Lösung

$$a + x = b \qquad \text{in } \mathbb{N}$$

wobei $a, b \in \mathbb{N}$

$$5 + x = 2$$

- $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass
  - $+$ Assoziativ $\star$
  - (Kommutativ)
  - $\exists\, \underline{0} : n + 0 = 0 + n = n \quad \forall n$ $\star$
  -

"Erweiterung von $\mathbb{N}$" $\rightsquigarrow \mathbb{Z}$

-3

$2-5 \qquad 1-4 \qquad 5-8 \quad \dots$

$m-n \qquad m \geq n$

$(2,5) \qquad (1,4) \qquad (5,8) \qquad m-n \overset{+n'}{=} m'-n'+n'$

$\Updownarrow$

$(m,n) \sim (m',n') \; :\Longleftrightarrow \; m+n' = n+m'$

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}\times\mathbb{N} / R$

Behauptung:
$\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+m', n+n')]$$

Übung 1.5.1

- $m > n$ $\quad (m,n) \sim (m-n, 0)$ (1)
- $m < n$ $\quad (m,n) \sim (0, n-m)$ (2)
- $m = n$ $\quad (m,m) \sim (0,0)$ (3)

↳ Jede ganze Zahl $[(m,n)]$

zu $\rightsquigarrow$

$$[(n,0)] \quad n \in \mathbb{N} \longrightarrow n$$
$$[(0,n)] \quad n \in \mathbb{N} \longrightarrow -n$$
$$[(0,0)] \longrightarrow 0$$

"Erweiterung" von $\mathbb{N}$

$$i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto [(n,0)]$$
$$\xi$$

Lemma $\mathbb{Z}$ mit der Operation $+$

(i) $+$ ist assoziativ.

(i') $+$ " kommutativ.

(ii) $+$ hat ein neutrales Element:

$[(0,0)]$: $[(0,0)] + [(m,n)] = [(m,n)] + [(0,0)] = [(m,n)]$

(iii) Jedes Element hat ein inverses Element

$\forall\ [(m,n)]\ ,\ \exists\ [(n,m)]$:

$$[(m,n)] + [(n,m)] = [(n,m)] + [(m,n)] =$$

$$[(m+n,\ m+n)] = \longrightarrow = [(0,0)]$$

$$\left(n>0 \quad \underset{n}{\underset{\shortparallel}{[(n,0)]}} \quad \text{und} \quad [(0,n)] = -n \right)$$

Definition 1.5.2
Es sei G eine Menge und $*\colon G \times G \to G$ eine zweistellige Verknüpfung. Dann ist das Paar $(G, *)$ eine **Gruppe**, falls

(1) $*$ assoziativ ist;

(2) es ein Element $e \in G$ gibt, das **neutrales Element** genannt wird, das erfüllt

$$e * g = g * e = g \quad \text{für alle } g \in G;$$

(3) jedes Element $g \in G$ ein **inverses Element** besitzt, das mit g^{-1} bezeichnet wird, nämlich ein Element, für das gilt

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e\,.$$

Falls die Verknüpfung kommutativ ist, dann wird $(G, *)$ **kommutative Gruppe** genannt.

$\hookrightarrow$ $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe