Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro
Universität zu Köln
11.01.2021

ANALYSIS I
Übungsblatt 9

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 18.01.2021, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1.

- Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern a_n. Nehmen wir an, dass der Grenzwert
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$$
existiert und gleich l ist. Beweisen Sie, dass wenn $l < 1$, die Reihe $\sum a_n$ konvergiert und wenn $l > 1$ die Reihe $\sum a_n$ gegen unendlich divergiert. Was kann gesagt werden, falls $l = 1$?

- Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern a_n. Nehmen wir an, dass der Grenzwert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
existiert und gleich l ist. Beweisen Sie, dass wenn $l < 1$, die Reihe $\sum a_n$ konvergiert und wenn $l > 1$ die Reihe $\sum a_n$ gegen unendlich divergiert. Was kann gesagt werden, falls $l = 1$?

Präsenzaufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2 + \sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{4n-1}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+n+1)}{3^n+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8n^2-2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-n}}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-n}$

Hausaufgabe 1. (6= 2 + 2 + 2 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
Es seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen mit positiven reellen Gliedern. Nehmen wir an, dass der folgende Grenzwert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =: l$$

existiert.

1. Wenn $0 < l < +\infty$, dann konvergiert $\sum a_n$ genau dann, wenn $\sum b_n$ konvergiert (und divergiert $\sum a_n$ gegen $+\infty$ genau dann, wenn $\sum b_n$ gegen $+\infty$ divergiert.)
2. Wenn $l = 0$ und $\sum b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$.
3. Wenn $l = +\infty$ und $\sum b_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum a_n$.

Hausaufgabe 2. (6 = 2 + 2 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n^a}{\binom{n}{k}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sin\big(b+\frac{a}{n}\big)\Big]^n$ mit $0 \le b < \frac{\pi}{2}$

konvergent sind.

Hausaufgabe 3. (6 Punkte)
Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass

$$a_{n+N} = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen dass, die Reihe

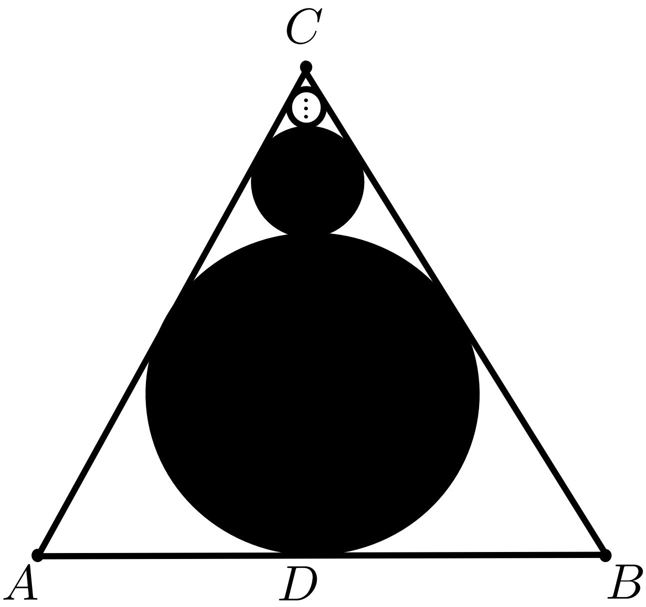
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

gegen

$$\frac{a_0 + a_1 q + \ldots + a_{N-1} q^{N-1}}{1 - q^N}$$

konvergiert für $|q| < 1$.

Hausaufgabe 4. (7 Punkte) Die Abbildung stellt ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 1$ dar, die fortwährend Kreise mit möglichst großen Radien enthält, so dass der nächste kleinere Kreis die Seiten AC und BC des Dreiecks und den vorhergehenden Kreis jeweils in einen Punkt berührt, und die Mittelpunkten alle Kreise auf der Strecke DC liegen.



Bestimmen Sie die Summe der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Kreise.

Extra Hausaufgabe 1. (10 = 2+2+2+2+2 Punkte)
Aus Friedls Analyse 1 Klausur ("Friedl 10" in "Alten Klausuren" auf meiner Webseite):
Fragen (1), (2), (3) der Kurzaufgaben und Aufgaben 1 und 2 der Beweisaufgaben.